

Великие жизни в математике

# Великие жизни в математике



Б.А.Кордемский



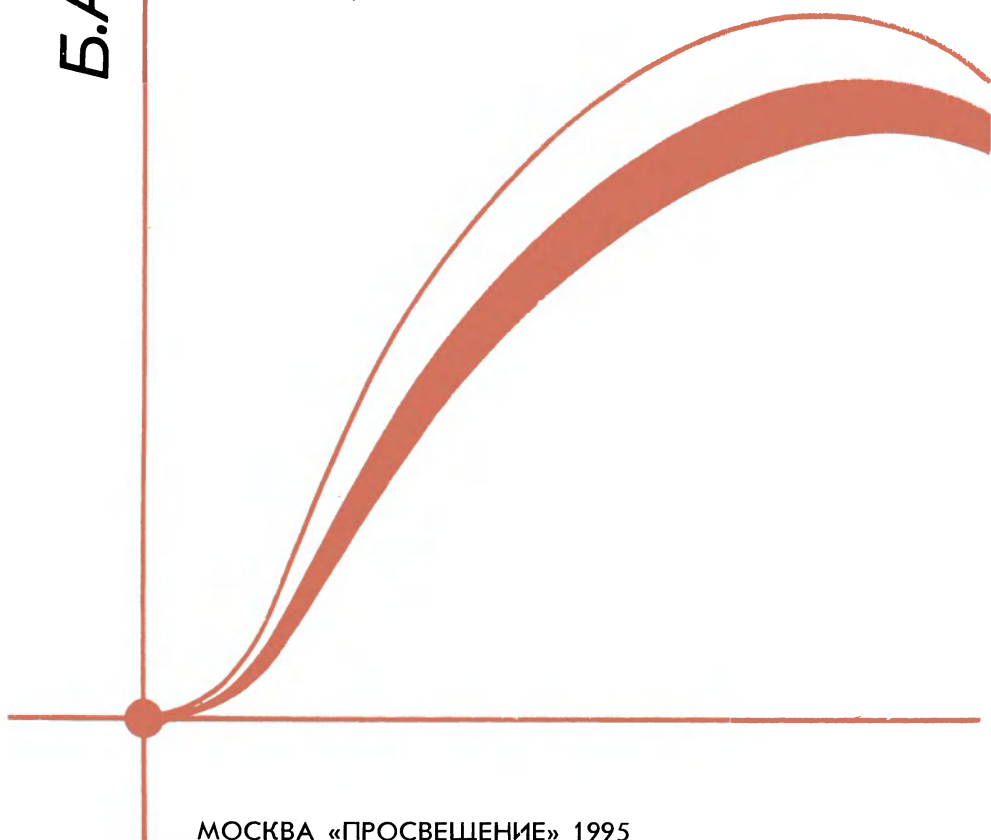




Б.А.Кордемский

# Великие жизни в математике

КНИГА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ  
8—11 КЛАССОВ



МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1995

ББК 22.1г  
К66

**Рецензенты:**

кандидат физико-математических наук *С. С. Демидов* (ведущий научный сотрудник  
Института истории естествознания и техники);

учитель-методист школы № 463 Москвы *А. М. Гольдман*;

учитель-методист школы № 13 г. Калининграда Московской области *З. И. Моисеева*

**Кордемский Б. А.**

К66      Великие жизни в математике: Кн. для учащихся 8—11 кл.—  
М.: Просвещение, 1995.— 192 с.: ил.— ISBN 5-09-003859-7.

В книге популярно и увлекательно рассказывается о жизни и деятельности выдающихся математиков: Архимеда, Эйлера, Лобачевского, Галуа, Чебышева, Ковалевской, Стеклова, Колмогорова.

Материал изложен в виде отдельных очерков. К каждому очерку прилагается уголок дополнительных сообщений и нетрадиционных задач с решениями, прямо или косвенно связанных с личностью ученого. Избранная автором форма изложения позволяет использовать текст в качестве готовых сценариев для проведения математических вечеров

К  $\frac{4306020000-245}{103(03)-95}$  Уточн. пл. 1995 г., № 140

ISBN 5-09-003859-7



ББК 22.1г

© Кордемский Б. А., 1995

Scan AAW

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Пусть властно по своей орбите  
Нас ритм сегодняшний кружит —  
Вернее будущее видит  
Лишь тот, кто прошлым дорожит.

*Олег Дмитриев*

Возникновение счета, развившегося далее в понятия числа, меры, формы и постепенно в прекрасную, величественную систему математических наук, способствовало существенному подъему уровня человеческой цивилизации. Математика стала профессией и признается теперь древнейшей профессией для людей умственного труда.

На уроках математики в школе учитель непременно знакомит вас, учеников, с историей развития математических понятий, символов, идей, методов. Но из-за нехватки учебного времени ему не всегда удастся рассказать о жизни великих творцов математики — интенсивной, целенаправленной, поучительной, хотя подчас и драматичной. Так и остается неизвестным для нас облик незаурядной, духовно красивой личности ученого — гения математики — со всем богатством его натуры, разносторонними интересами. А ведь «моральные качества выдающейся личности имеют, возможно, большее значение для данного поколения и всего хода истории, чем чисто интеллектуальные достижения» (А. Эйнштейн в статье «Памяти Марии Кюри»).

В представлении многих ученые — творцы математических абстракций — сами какие-то полуабстрактные существа, «сухари», погруженные в свою науку и ничем другим не интересующиеся. Заблуждение это от неведения того, что гениальность — «великий дар благодать природы» — совместна только с личностью, увлеченной вдохновенным созидательным трудом и вместе с тем разносторонне деятельной, может быть, и сложной, но всегда глубокой, содержательной.

Большое математическое дарование нередко сочетается также с проявлением творческого интереса к поэзии, прозе, другим видам искусства. Не заложена ли в самой природе математического мышления потребность «в гармоническом сочетании объективных познаний и субъективных переживаний, математики и литературы, абстракции и актуальности» (О л ь ш к и Л. История научной литературы. — М., 1933—1934)? История «великих жизней» дает тому немало подтверждений. Здесь ограничимся немногими из них.

*Омар Хайям* (1040—1131). Открыл свойства «арифметического треугольника», ставшего известным в Европе лишь 16 веков спустя. Высказанные им геометрические идеи перекликаются с истинами Евклида. Но еще более известен Хайям как поэт.

*Галилео Галилей* (1564—1642) — не только великий астроном, физик, художник, музыкант, но и создатель классического стиля итальянской прозы.

*М. В. Ломоносов* (1711—1765) — гениальный первооткрыватель главного закона жизни — сохранения вещества и энергии. С равным увлечением он занимался всеми естественными науками того времени, производством стек-

ла, изучением погоды. Заложил основы современного русского языка, был первым в России ученым, применившим стихотворную форму изложения научной мысли и объяснения ее практического значения. «Его поэзия,— сказал позже Н. В. Гоголь,— начинающийся рассвет...»

*Рене Декарт* (1596—1650) так проявил себя в литературном мастерстве, что занесен в ряд основателей французской прозы нового времени. Вообще-то он и начал свою творческую жизнь с поэзии и много работал в этом жанре. Увековечил он себя в области математики и философии, а все же его последней работой была пьеса в стихах.

*Джеймс Джозеф Сильвестр* (1814—1897) — английский математик, несколько лет вел лекционный курс в университете Балтимора (США). С его преподавательской деятельностью и связывают начало расцвета математики в США. Но он был еще и поэтом.

Почти все знаменитые математики России писали стихи (*Н. И. Лобачевский*, *В. Я. Буняковский*), или прозу (*В. А. Стеклов*), или и то и другое (*С. В. Ковалевская*).

Театральные пьесы, и не плохие, сочинял немецкий математик *Феликс Хаусдорф* (1868—1942), широко известный работами по топологическим пространствам. Его пьесы пользовались большим успехом. В двадцатых годах они шли в немецких театрах при аншлаге. В молодости Ф. Хаусдорф пробовал силы и как композитор. Не под влиянием ли этих увлечений искусством он скажет однажды: «Есть в математике нечто возвышающее человеческий восторг» (Сухотин А. Ритмы и алгоритмы.— М., 1983)?

Без такого пафоса, но определеннее выдвигает интересную концепцию академик Е. Н. Павловский в книге «Поэзия, наука и ученые» (М., 1958): «Поэзия остается в существе науки; поэзия, я бы сказал, утепляет индивидуальный процесс трудного научного творчества, шаг за шагом приводящего к решению поставленных вопросов; и кажущийся замкнутым в своей специальности ученый может быть подлинным поэтом в науке».

Основное содержание нашей книги составляют восемь очерков, рассказывающих о жизни и деятельности шести самых выдающихся ученых-математиков России: *Эйлера*, *Лобачевского*, *Чебышева*, *Ковалевской*, *Стеклова*, *Колмогорова*, великого геометра древности *Архимеда* и гениального юноши, творца современной алгебры — *Эвариста Галуа*.

Композиция текста каждого очерка такова, что позволяет легко обратиться к сценарий тематического вечера, посвященного ученому — «герою» очерка. Для примера текст одного очерка (о Лобачевском) дан в форме готового сценария.

После каждого очерка дан «Уголок...», содержащий дополнительные сообщения и красивые задачи с решениями. Материал «Уголка...» доставит вам много удовольствия, будете ли вы «штурмовать» его организованно в проведении второй части тематического вечера или индивидуально в условиях домашнего уюта.

Любите ли вы математику? Вовлечены ли ею в удивительный мир абстракций и задач, шлифующих разум и логику мышления? Ответившим «да» общение, хотя бы и книжное, с великими, посвятившими свою жизнь математике, доставит радость от ощущения как бы сотворчества.

Для ответивших «нет» такое общение еще нужнее. Ведь не исключено, что при чтении возникнет восхищение жизненными свершениями ученых, появится собственное чувство сопереживания, и это может побудить вас к переоценке своего отношения к математике.

Читайте, думайте, наслаждайтесь решением приведенных в книге задач — занимательных и серьезных. Какая радость, когда решение найдешь самостоятельно!

Подмечайте математику вокруг себя — в быту и природе. Для наблюдательного человека даже простые срезы растений — красивые геометрические фигуры:

### **Геометрия трав**

Математик несбывшийся, странник,  
оглядись, удивляясь стократ:  
в травах — срез волчеца — пятигранник,  
а сечение душицы — квадрат.  
Все на свете покажется внове  
под гольцом, чья вершина в снегу:  
водосбор — треуголен в основе  
на цветущем альпийском лугу!  
Где же круг?  
Возле иглистой розы,  
там, где луг поднебесный скалист,  
вижу, с ветром играет березы  
треугольноромбический лист...

*Равиль Бухараев*

Творческую деятельность изящно охарактеризовал виднейший английский математик *Г. Харди* (1877—1947, Кембридж): «Математик, также как художник или поэт, создает узоры. И если эти узоры более устойчивы, то лишь потому, что они составлены из идей. И они обязаны быть прекрасными: подобно краскам и словам — гармонически соответствовать друг другу. Красота есть первое требование: в мире нет места некрасивой математике».

## Эврика!

Однажды школьница участливо посетовала: «Бедные гении! Они





вынуждены были открывать то, что мы проходим в школе!»

Действительно, трудно даже представить себе, что было такое время, когда ни один человек на земном шаре не умел вычислять объем и поверхность шара, центр тяжести треугольника, конуса, сегмента параболы, величину силы, выталкивающей тело, погруженное в жидкость, так просто и точно, как теперь это делает любой из нас. Первым, кому покорились эти и многие другие задачи, был Архимед.

### «...Я сдвину Землю»

Родина Архимеда — г. Сиракузы (Сицилия). Первоначальным его образованием руководил отец — математик и астроном Фидий, умело по-

буждая сына к творческому познанию астрономии, механики и математики. Позже тяга к углублению теоретических знаний — результат воспитания и природного дарования — привела Архимеда в Александрию (Египет) — тогдашний мировой научный центр.

В Александрии первые его блестящие успехи были достигнуты в теоретической механике и ее практических применениях. Замечательным его изобретением была машина для поливки полей («винт-улитка»), имевшая и до сих пор имеющая большое хозяйственное значение в Египте, где дождей почти не бывает и где все сельское хозяйство основано на искусственном орошении.

Вернувшись из Александрии в Сиракузы, Архимед в течение 5—10 лет делает выдающиеся открытия в гео-

метрии. Одновременно развивает бурную инженерную деятельность: конструирует разнообразные остроумные оборонительные сооружения и военные машины для своего города.

Архимед первым ввел понятие центра тяжести фигуры и разработал методы его вычисления для различных фигур, открыл и сформулировал «закон рычага». Известно еще одно его горделиво-образное восклицание, пережившее века: «Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю». Разумеется, эти слова не более чем поэтическая гипербола.

## В мире фигур и чисел

Разрабатывая новые для науки того времени методы вычисления площадей криволинейных фигур (например, параболического сегмента) и объемов тел, ограниченных кривыми поверхностями (например, цилиндра и шара), Архимед нашел довольно узкие границы для числа  $\pi$ ; он строго доказал, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

По словам греческого писателя Плутарха, Архимед имел возвышен-

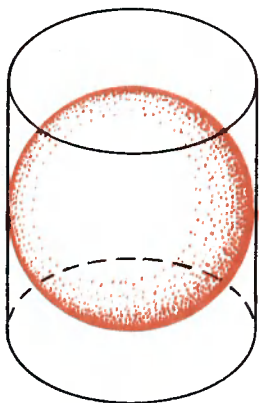


Рис. 1

ную душу, глубокий ум и обладал огромным богатством геометрических теорий. «Во всей геометрии,— писал Плутарх,— нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед».

В письме-трактате «О шаре и цилиндре» Архимед изложил свой метод вычисления объема шара и — что гораздо сложнее — поверхности шара. И был очень горд открытием красивого результата (рис. 1):

*объем шара, вписанного в цилиндр, в полтора раза меньше объема цилиндра и что так же относятся поверхности этих тел.*

«Разумеется,— пишет Архимед в предисловии к трактату,— эти свойства были присущи этим телам всегда, но они остались неизвестными всем геометрам; ни один из них не заметил даже, что эти тела *соизмеримы* между собой».

Это открытие восхитило Архимеда настолько, что он даже завещал высечь на его будущем надгробии фигуру цилиндра с вписанным шаром, что и было выполнено впоследствии.

Теперь-то доказательство утверждения Архимеда — простенькая задача для нас, решаемая по готовым формулам:

$$\frac{V_{\text{цил.}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\pi R^2 \cdot 2R}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{S_{\text{полн.цил.}}}{S_{\text{шара}}} = \frac{2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{2}.$$

Но в то далекое время еще не были открыты «бедными гениями» эти формулы, не было такой удобной, как теперь, алгебраической символики — «математической стенографии», не было и привычной нам с детства десятичной позиционной

формы записи чисел. И это делало все выкладки и сами рассуждения очень громоздкими.

Например, запись дроби  $\frac{10}{71}$  Архимеду приходилось делать так:  $\tau\alpha\alpha'$  — знак «прим» — символ дроби, в которой первая буква — числитель ( $\tau = 10$ ), остальные — знаменатель ( $\sigma = 70$ ,  $\alpha = 1$ ). Однако же расчеты Архимед производил по изобретенной им, прогрессивной по тому времени, системе счисления — октадами, — позволявшей относительно просто действовать с большими числами.

Первая октада — все числа от 1 до  $10^8 - 1$ , число  $10^8$  — новая единица счета — первое число второй октады, в которую входят все числа от  $10^8$  до  $10^{16} - 1$  и т. д. При этом все числа второй, третьей и последующих октад обозначались так же, как и числа первой октады.

Как видим, оставался малюсенький шаг до чисто позиционной системы записи чисел — десятичной или с другим основанием системы, но Архимед его не сделал. Этот недостаток Архимеда Гаусс (1777—1855) считал величайшим несчастьем в истории науки и с горечью отмечал: «До каких высот поднялась бы теперь наука, если бы Архимед сделал это открытие!»

### Опередивший время на 18 веков!

Вычисляя площадь поверхности шара, Архимед рассматривал ее фактически как общий предел поверхностей вписанных и описанных фигур. Вычисляя объемы фигур вращения, он фактически составлял интегральные суммы, т. е. на частных задачах уже подвел математику к порогу, за которым лежит дорога в

мир могучих методов, основанных на общих понятиях предела, производной, интеграла.

И вот поразительный и, пожалуй, уникальный факт в истории математики: более 18 веков (!), считая от III века до н. э., созревали и накапливались знания, совершенствовались средства математики, чтобы только в XVII веке она оказалась подготовленной для открытия дифференциального и интегрального исчисления И. Ньютоном и Г. В. Лейбницем.

«Внимательно читая сочинения Архимеда, — писал Лейбниц, — перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометрии».

### Первый в мире планетарий

Изумительное изобретение Архимеда — механический небесный глобус — своеобразный планетарий, демонстрировавший все видимые движения небесных тел (на макетах) и даже фазы Луны, осуществляемые с помощью специальных механизмов, расположенных внутри глобуса. На поверхности глобуса нанесены звезды и 12 зодиакальных созвездий, через которые движется Солнце, проходя одно созвездие в месяц. Это был первый на Земле планетарий, много столетий бывший непревзойденным творением практической механики.

Самое раннее упоминание о нем относится к I веку до н. э., а последнее принадлежит римскому поэту Клавдиану (V в.):

Неба устав, законы богов, гармонию  
мира —  
Всё Сиракузский старик мудро  
на землю принес.  
Воздух, скрытый внутри, различные  
движет светила  
Точно по дивным путям, сделав  
творенье живым.



Ложный бежит зодиак, назначенный  
  ход выполняя,  
Лик поддельный Луны вновь каждый  
  месяц идет,  
Смелым искусством гордясь, свой мир  
  приводя во вращенье,  
Звездами вышних небес правит умом  
  человек.

Содержание и тон стихотворения не оставляют сомнения в том, что Клавдиан видел в действии архимедов глобус (больше чем через 600 лет после его создания). Само появление такого стихотворения в эпоху упадка наук и распространения мистицизма показывает, что глобус Архимеда был для людей символом могущества разума.

## Не тронь моих кругов!

В 212 году до н.э. римские легионы, двинувшиеся на завоевание Карфагена (вторая Пуническая война), длительное время безуспешно пытались ворваться в Сиракузы — город, расположенный на их пути к Карфагену.

Оборона города держалась гениальной инженерной изобретательностью Архимеда. При помощи нескольких десятков хорошо отполированных щитов сиракузских воинов, собирающих в одну точку отраженные солнечные зайчики, он поджигал галеры римлян, с моря подступавших к стенам города, или схватывал галеры железными челюстями-клювами, выдвигавшимися из-за стен, ограждавших город, и разбивал их о скалы, топил в пучине моря. Невиданные доселе баллисты катапульты Архимеда обрушивали на легионы римлян град камней массой почти в четверть тонны.

Отступили римляне от Сиракуз,

но далеко не ушли, а горожане и утомленные воины затеяли традиционное празднество в честь Артемиды. Этим тактическим промахом воспользовались римляне. В ночь праздника, когда потерявшие бдительность защитники города заснули, отряд римлян бесшумно поднялся на стену, перебил стражу и открыл ворота. Ворвавшиеся римляне учинили варварскую резню, грабеж, насилия.

Но ничто не могло отвлечь семидесятипятилетнего Архимеда от глубоких размышлений над решением какой-то очередной задачи.

По одной версии предания, первым знаком того, что город пал, была для Архимеда тень римского солдата, упавшая на чертеж, построенный Архимедом на пыльной земле. Солдат наступил на чертеж, и рассердившийся Архимед воскликнул: „*Noli tangere circulos meas!*“ — «Не трогай моих чертежей!» Разъяренный солдат поднял меч и убил безоружного старца.

Он был задумчив и спокоен,  
Загадкой круга увлечен...  
Над ним невежественный воин  
Взмахнул разбойничьим мечом.

Чертил мыслитель с вдохновеньем,  
Сдавил лишь сердце тяжкий груз:  
«Ужель гореть моим твореньям  
Среди развалин Сиракуз?»

И думал Архимед: «Поникну ль  
Я головой на смех врагу?»  
Рукою твердой взял он циркуль —  
Провел последнюю дугу.

Уж пыль клубилась над дорогой,  
То в рабство путь, в ярмо цепей.  
«Убей меня, но лишь не трогай,  
О варвар, этих чертежей!»

Учитель математики К. Ф. Анкудинов

По другой версии предания, солдат убил Архимеда за его отказ подчиниться приказу идти с солдатам к Марцеллу — командиру римлян. Так или иначе, но восклицание «Не порти мои круги!» стало афоризмом — заповедью высокой морали на все последующие эпохи.

### Архимед

Нет, не всегда смешон и узор  
Мудрец, глухой к делам Земли:  
Уже на рейде в Сиракузах  
Стояли римлян корабли.

Над математиком курчавым  
Солдат занес короткий нож,  
А он на отмели песчаной  
Окружность вписывал в чертеж.

Ах, если б смерть — лихую гостью  
Мне также встретить повезло,  
Как Архимед, чертивший тростью  
В минуту гибели — число!

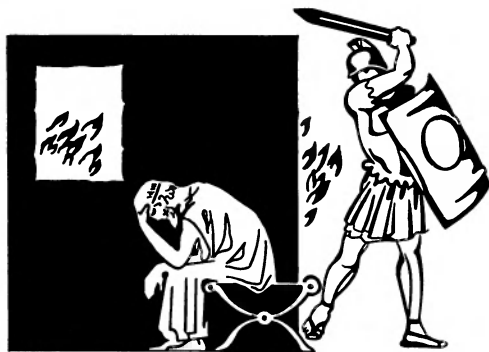
*Дмитрий Кедрин*

А известный поэт Черногории *Зувдия Ходжич* (род. в 1944 г.), как бы заново осмысливая последние слова Архимеда, написал взволнованное стихотворение:

### Не трогайте моих кругов

Делайте со мною, что хотите,  
Вздерните меня на звездном крюке,  
Мокрыми цепями укротите,  
Жгите ноги и ломайте руки,  
Цельте в сердце мне и в наших вдов,  
Но  
Не трогайте моих кругов.

По водам томящегося жаждой,  
Под палящим солнцем загоняйте,  
Пусть на мне свой меч проверит  
каждый,  
На колени бросьте и пытайте.  
В ссылку я отправиться готов,  
Но  
Не трогайте моих кругов.



«Скифы» или порошок термита  
Нависает в будущем над нами —  
Под меня подсыпьте динамита.  
Сиракузы мы спасем кругами.  
Не прощайте мне чужих долгов.  
Но  
Не трогайте моих кругов.

Слабою натруженной рукою  
Север с югом сдвину; дни и ночи  
Не давайте ни на миг покою,  
Известью гашеной жгите очи.  
Лгу перед лицом ваших судов,  
Но  
Не трогайте моих кругов.

*Перевод с сербского Б. Слуцкого*

## Первый в математической физике

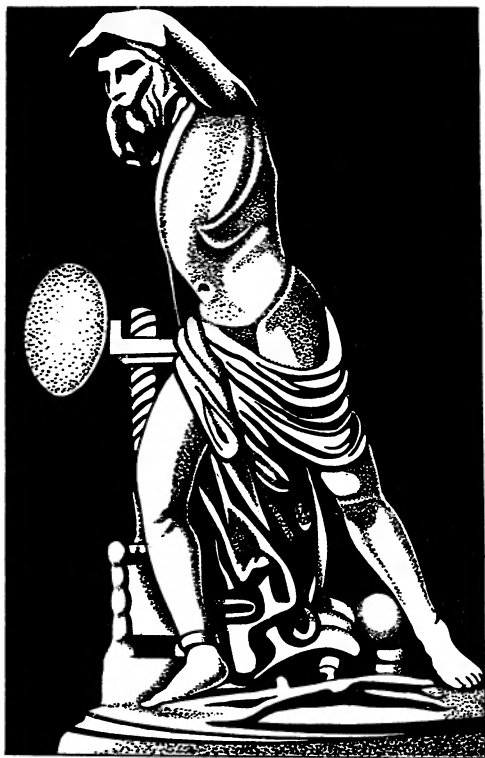
Архимед первым в истории науки широко применил математику к решению физических задач (основы гидростатики, условия устойчивости плавающих тел и другие задачи так называемой математической физики).

«В истории есть очень немного имен и книг, пронизывающих века и даже тысячелетия и непрерывно влияющих на развитие культуры, техники и науки. В точном естествознании такими остались и на сегодняшний день геометрия Евклида и

гидростатика Архимеда. Они нужны современному человеку так же, как были необходимы древнему греку, римлянину и средневековому арабу», — писал академик С. И. Вавилов.

Жизнь и деятельность таких гигантов науки, как Евклид и Архимед, может быть, и вдохновила римского философа Эпиктета (I в. н.э.) сказать:

Смелым будь. Умей не верить.  
В этом смысл науки всей.



Памятник Архимеду в Сиракузах

## Могила заброшена, но память жива

Цицерон — знаменитый римский оратор и политик — разыскал могилу Архимеда, когда в 76 году до н.э. был в Сицилии. Им был найден могильный обелиск с выгравированным шаром, вписанным в цилиндр. За 136 лет, прошедших со времени гибели Архимеда, его могила была заброшена и забыта.

В Сиракузах все же воздвигли оригинальный памятник Архимеду с моделью вогнутого зеркала в руке. По преданию, с помощью такого зеркала Архимед поджигал корабли неприятеля, угрожавшие Сиракузам. Зеркало имеет вид сферического сегмента, радиус кривизны которого равен примерно одному метру. Как вы думаете, с какого расстояния при помощи такого зеркала Архимед мог поджечь корабли противника?

Прошла столетий вереница,  
Научный подвиг не забыт.  
Никто не знает, кто убийца,  
Но знают все, кто был убит.

Труды Архимеда значительно подкрепили убеждение людей в том, что Вселенная зиждется на математических принципах. Закон и порядок существуют в природе, и математика — ключ к пониманию этого порядка.

Творения Архимеда — вершина, которой достигли точные науки в древности.

«Начала» Евклида были настольной книгой Архимеда всю его жизнь.



## Холодная и приятная на ощупь

По свидетельству А. П. Чехова, именно так — поэтично — воспринимает архимедову выталкивающую силу Егорушка из повести «Степь»:

«Егорушка... разбежался и полетел с полуторасаженной вышины. Описав в воздухе дугу, он упал в воду, глубоко погрузился, но дна не достал; какая-то сила, холодная и приятная на ощупь, подхватила, понесла его обратно наверх».

## Ратибор переправляется через реку

Воину-разведчику Ратибору из романа В. Д. Иванова «Русь изначальная» нужно было незаметно перейти на другой берег не слишком глубокой реки. Для этого он взял длинную толстую тростинку, «чтобы дышать под водой... Придерживая тростинку за конец губами, он скрылся под водой и обеими руками поднял камень величиной с коровью голову. Обвязав груз тонкой веревкой, Ратибор устроил петлю для руки...».

Вопрос: для чего Ратибор взял камень в руки?

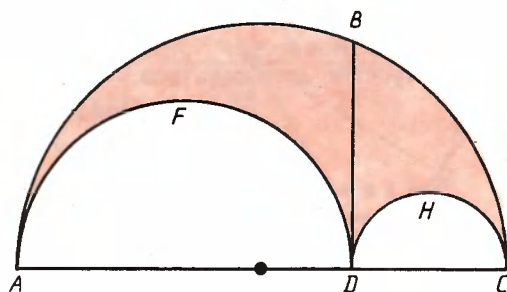


Рис. 2

## Шутка (из журнала «Крокодил»)

К сожалению, на утопающего в долгах выталкивающая сила не действует.

**Задача 1. (Задача-легенда.)** Однажды царь приказал Архимеду установить, сколько потребуется золота, чтобы оно по массе равнялось бы массе слона. Но таких весов, чтобы взвесить этот громадный груз, нигде не оказалось. Интересно, каким же способом — и довольно простым — Архимед решил эту задачу?

**Задача 2. (Ошибка Вольтера.)** Желая узнать, имеет ли воздух вес ( $P = mg$ ), Вольтер поставил следующий опыт. Он взвесил бычий пузырь, надутый воздухом, а затем тот же пузырь без воздуха. Пузырь в обоих случаях весил одинаково и Вольтер пришел к выводу, что воздух ничего не весит. Чем была вызвана ошибка Вольтера? Как взвесить воздух?

**Задача 3. (Можно ли пальцем надавить на воду?)** Что произойдет с весами, находящимися в равновесии, если погрузить палец в стакан с водой, стоящий на чаше весов? Палец не прикасается ни ко дну, ни к стенкам стакана.

**Задача 4. (Задача Архимеда.)** а) Начерчена полуокружность ABC

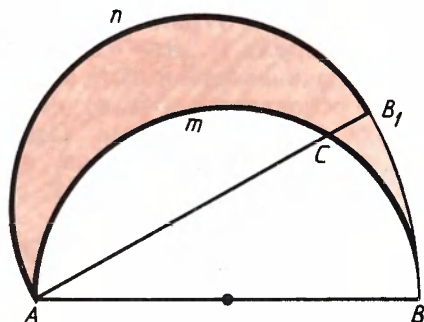


Рис. 3

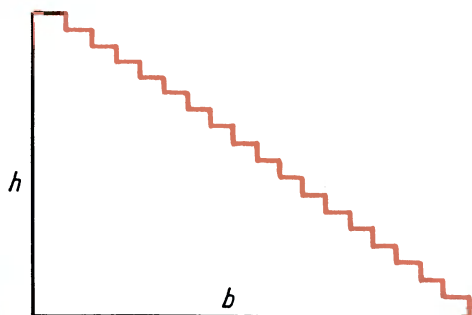
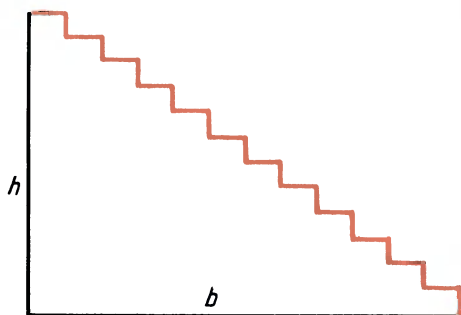


Рис. 4

(рис. 2). Из точки  $B$  опущен на диаметр  $AC$  перпендикуляр  $BD$ , и на отрезках  $AD$  и  $DC$ , как на диаметрах, описаны две полуокружности  $AFD$  и  $DHC$ . Докажите, что площадь получившейся секирки (арбелона)  $AFDHCBA$  равна площади круга диаметра  $DB$ .

б) Изменим фасон секирки, изображенной на рисунке 2: оставим на рисунке только полуокружности  $ABC$  и  $AFD$ , а площадь полукруга  $DHC$  присоединим к площади раскрашенной секирки; и вместо отрезка  $BD$  построим хорду  $MN \parallel AC$ , касающуюся полукруга  $AFD$ . Пусть  $MN = 12$  см. Чему равна площадь секирки  $ABCDFA$ ?

**Задача 5. (Площадь серпа.)** Полуокружность радиуса  $l$  повернута относительно конца своего диаметра на  $30^\circ$ . Найдите площадь закрашенной фигуры (рис. 3).

**Задача 6. (Надо лесенки покрыть коврами.)** Две лестницы, имеющие одинаковую высоту  $h$  и одинаковое основание  $b$  (рис. 4), сверху до низу покрыты коврами. Одинаковы ли длины этих ковров, если одна лестница состоит из 12 ступенек, а другая — из 18?

**Задача 7. (Задача Пифагора.)** Докажите, что сумма любого числа ( $n$ ) последовательных нечетных чисел, начиная с 1, есть точный квадрат ( $n^2$ ).

**Задача 8. (Трисекция угла у вавилонян.)** Вернемся на 5000 лет назад — в культуру вавилонян. На одной из найденных археологами глиняных табличек (на табличке Гинкса) клинописными знаками сформулирована задача: «Найти треть угла от прямого». Вавилоняне умели строить равносторонний треугольник, и прямой угол у них, как и у нас, содержал  $90^\circ$ . Каким простым способом могли вавилоняне построить угол, равный  $\frac{1}{3}$  прямого?

**Задача 9. (Одним раствором циркуля.)** Начертите в своей тетради луч  $OA$  и догадайтесь, как, пользуясь только циркулем с произвольным неизменным раствором его ножек, построить в плоскости тетради такую точку  $B$ , чтобы воображаемый луч  $OB$  составил с лучом  $AO$  угол  $30^\circ$ .

Нужно всеми средствами обучать искусству доказывать, не забывая при этом и об искусстве догадываться.

Д. Пойа

**Задача 10. (Памяти Диофанта.)** Ищем три числа, такие, что сумма всех трех, а также суммы любых двух из них являются квадратами некоторых целых чисел. Выразите это условие одним уравне-

нием с четырьмя переменными. Придумать для получившегося уравнения способ решения в целых числах — не простая, но увлекательная задача. Решите ее.

### Спираль Архимеда

Начертите окружность, разделите ее и радиус  $OA$  на  $n$  равных частей ( $n=12$  на рисунке 5). Проведите из центра  $O$  лучи ко всем точкам деления окружности и перенумеруйте их. На луче 1 отметьте точку на расстоянии, равном  $\frac{1}{12} OA$  от центра  $O$ , на луче 2 — точку на расстоянии, равном  $\frac{2}{12} OA$  от центра  $O$ , на луче 3 — точку на расстоянии  $\frac{3}{12} OA$  от центра  $O$  и т. д. Последовательно соединив отмеченные точки плавной кривой (начиная с точки  $O$ ), получите представление о форме спирали Архимеда (на рисунке — красная линия). Заметим попутно, что бумага в рулоне свертывается по спирали Архимеда.

Дома или в школьной мастерской

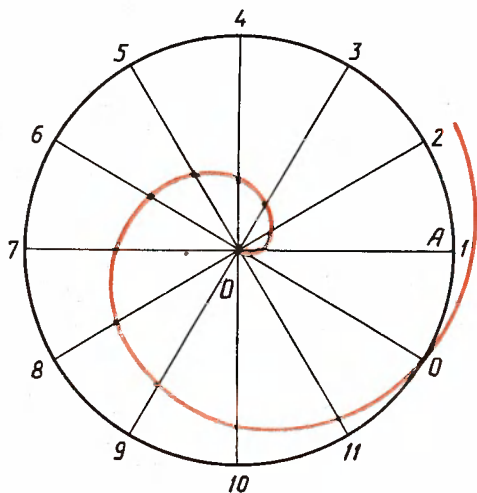


Рис. 5

постройте прибор, механически вычерчивающий спираль Архимеда. Для этого приготовьте деревянный диск  $C$  (рис. 6), по краю которого вырезан желобок (для шнура), и укрепите его неподвижно на плоскости чертежной бумаги. К центру  $A$  диска прикрепите стержень  $N$  с прорезью так, чтобы он мог вращаться вокруг точки  $A$ . На свободном конце стержня закрепите блок  $B$ . В точке  $D$  неподвижного диска прикрепите тонкий прочный шнур, который огибает диск по желобу, затем перекидывается через блок и закрепляется на ползунке  $P$ . Ползунок должен иметь возможность двигаться поступательно в прорези стержня  $N$ . Приготовьте упругий резиновый жгут, один его конец закрепите в центре  $A$  диска, а другой конец закрепите на левой стороне ползунка  $P$ . Благодаря этому шнур всегда будет находиться в натянутом состоянии. К ползунку прикрепите чертящее острие. Это острие опишет на бумаге спираль Архимеда, когда будете вращать стержень  $N$  против движения часовой стрелки.

В процессе вращения стержня

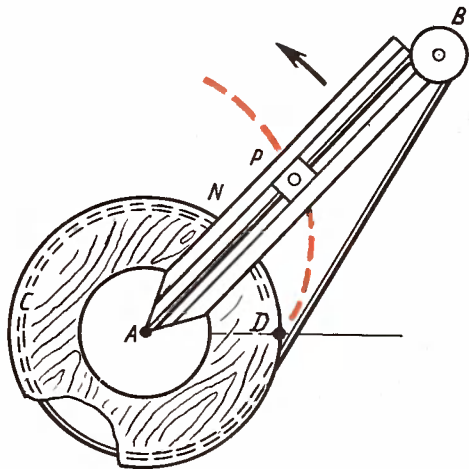


Рис. 6



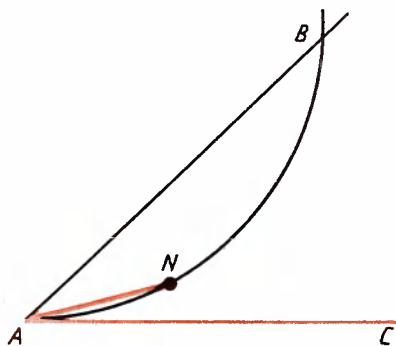


Рис. 7

длина шнура остается постоянной, а расстояние, на которое подвинется ползунок, поступательно перемещающаяся по стержню, будет равно длине той части шнура, которая за это время сматается с диска C. Но длина эта пропорциональна углу поворота стержня  $N$ , следовательно, и путь, пройденный ползунком, будет пропорционален углу поворота стержня

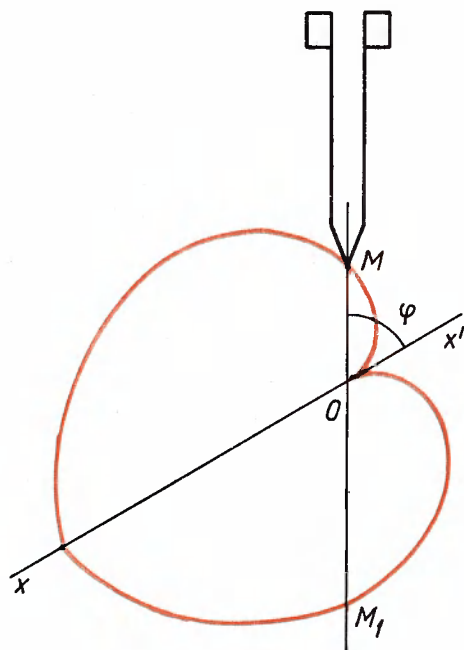


Рис. 8

ня  $N$ , что и является свойством, определяющим спираль Архимеда: изменение длины радиус-вектора «текущей» точки, описывающей спираль Архимеда, пропорционально изменению его угла поворота относительно «полярной» оси.

Выразив уравнением свойство радиус-вектора ( $r$ ) точки спирали быть пропорциональным углу ( $\varphi$ ) его отклонения от некоторого начального луча  $Ox$  («полярной» оси), получим уравнение спирали Архимеда:

$$r = a \cdot \varphi$$

( $a$  — коэффициент пропорциональности).

Интересно заметить, что изобретением приборов для вычерчивания спирали Архимеда занимались такие знаменитые математики, как Гюйгенс, Клеро и др.

Металлическая пластинка с тщательно выгравированной спиралью Архимеда может служить прибором для деления начерченного угла на равные части. Например, для трисекции угла  $BAC$  (рис. 7) достаточно разделить на 3 равные части радиус-вектор  $AB$  и радиусом  $AN = \frac{1}{3} AB$  сделать засечку  $N$  на спирали, тогда  $\angle NAC = \frac{1}{3} (\angle BAC)$ . Такие пластинки встречаются в некоторых зарубежных готовальнях.

В любой швейной машине и механизме для наматывания ниток на шпульку есть важная деталь, называемая эксцентриком, профиль которого очерчен двумя симметричными дугами спиралей Архимеда, как показано на рисунке 8. Любопытно, что хотя контур эксцентрика не окружность, а любой его диаметр имеет одну и ту же длину. Действительно, пусть  $M$  — точка на дуге «левой» спирали, полярное уравнение которой  $r = a \cdot \varphi$ . Тогда  $OM = a \cdot \varphi$ , где  $a$  — константа для данной спи-

рали,  $\varphi$  — угол между  $OM$  и осью симметрии  $xx'$ . Диаметрально противоположная точка  $M_1$  лежит на «правой» спирали, и  $OM_1 = a(\pi - \varphi)$ . Складывая  $OM$  и  $OM_1$ , получаем, что любой диаметр  $MM_1 = a \cdot \pi$  не зависит от угла ( $\varphi$ ) поворота радиус-вектора «текущей» точки  $M$ .

### Сколько весит площадь?

Архимед предложил остроумный способ приближенного вычисления площади начерченной плоской фигуры при помощи взвешивания: перечертить фигуру на лист из однородного материала, вырезать ее, взвесить на точных весах, а затем взвесить квадрат со стороной, равной 1 (единице масштаба фигуры), вырезанный из того же материала, и разделить первый результат на второй.

Начертите на картоне окружность радиуса  $r=1$  дм, аккуратно вырежьте круг, определите его площадь при помощи весов. Получится приближенное значение числа  $\pi$ . Действительно,  $S_{кр} = \pi r^2$ , а при  $r=1$   $S_{кр} = \pi$ .

### Приближенное извлечение $\sqrt{n}$ (авилонский способ)

Если  $n$  не является точным квадратом, то его представляют в виде произведения  $a \cdot \frac{n}{a}$ , где  $a^2$  — точный квадрат, ближайший к числу  $n$ , и берут среднее арифметическое  $\frac{1}{2} \left( a + \frac{n}{a} \right)$  в качестве первого приближения для  $\sqrt{n}$ . Например, пусть  $n=20$ , тогда  $a^2=16$  и  $20=4 \cdot 5$ , а  $\sqrt{20} = \frac{1}{2} (4 + 5) = 4 \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ .

Для уточнения решения берут в качестве значения  $a$  получившееся первое приближение, тогда

$$\sqrt{20} = \frac{1}{2} \left( \frac{9}{2} + 20 : \frac{9}{2} \right) = 4 \frac{17}{36} \approx 4,4722,$$

что только в четвертом знаке отличается от точного значения  $\sqrt{20}$  ( $\sqrt{20}=4,4721\dots$ ).

Архимед, вероятно, пользовался этим методом при вычислении приближенного значения  $\pi$  ( $\approx \frac{22}{7}$  — «число Архимеда») и при оценке значения  $\sqrt{3}$  в виде двойного неравенства:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{78}.$$

Внешне этот вавилонский способ выглядит трудоемким, но, имея под рукой таблицу квадратов, вы можете с помощью карманного микрокалькулятора (на котором не предусмотрена операция извлечения квадратного корня) быстро получить приемлемый результат.

Попрактикуйтесь!

**Задача 11.** (*Чуть-чуть фантазии и догадки.*) Из счетных палочек (рис. 9) выложено грубо приближенное равенство (абсолютная погрешность составляет 0,75). Переложив только одну палочку из левой части равенства в правую, можно получить равенство с погрешностью, меньшей 0,001. Догадаетесь?

**Задача 12.** (*Для тех, кто знаком с интегралом.*)

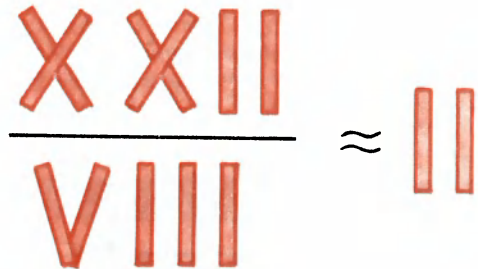


Рис. 9

1) Вычислите площадь сектора, ограниченного архимедовой спиралью  $r=a \cdot \varphi$ , полярной осью  $Ox$  и радиус-вектором произвольной точки  $(\varphi_1; r_1)$  на первом витке спирали. Формула площади сектора:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1} r^2 d\varphi.$$

2) Докажите, что площадь такого сектора пропорциональна кубу радиус-вектора точки  $(\varphi_1; r_1)$ .

3) Вычислите площадь первого витка спирали (первый виток образуется при изменении угла от  $\varphi_1=0$  до  $\varphi_2=2\pi$ ).

**Задача 13. (Клиновидный кусок цилиндра.)** Он отсекается плоскостью, проведенной через диаметр нижнего основания цилиндра и касающейся окружности верхнего основания (т. е. имеющей с ней единственную общую точку) (рис. 10).

Каков объем такого клина, если  $R$  — радиус основания цилиндра,  $H$  — его высота?

Поставил эту задачу и дал первое решение ее Архимед (см.: Архимед. Сочинения. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 320—321).

Задача, решение которой в те далекие от нас времена было посылно

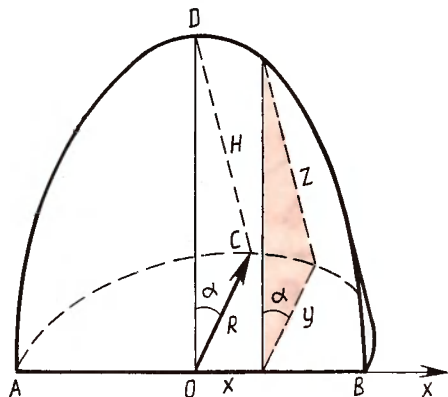


Рис. 10

лишь гению Архимеда, теперь доступна каждому, кто владеет формулой для вычисления объема ( $V$ ) тела, площадь ( $S$ ) поперечного сечения которого возможно выразить функцией произвольной точки этого сечения.

На рисунке 10, изображающем «клин Архимеда», проведено через точку с абсциссой  $x$  сечение перпендикулярно диаметру  $AB$ , принятому за ось  $Ox$ . Образовался прямоугольный треугольник с катетами  $y, z$  и углом  $\alpha$ , тангенс которого равен  $\frac{H}{R}$ . Площадь этого треугольника теперь уже несложно выразить как функцию абсциссы  $x$  любой его точки,  $S(x)$ , и вычислить объем «клина Архимеда» по формуле

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — абсциссы концов диаметра  $AB$ .

**Мы привыкли...  
А на самом деле?..  
(Причуды историографии)**

1. Существует только один прямоугольный треугольник, стороны которого — три последовательных натуральных числа:  $a=n-1$ ,  $b=n$ ,  $c=n+1$ . В самом деле, решая уравнение

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2,$$

получаем  $n=4$ . Этот уникальный треугольник (3, 4, 5), служивший древним египтянам «прибором», например, для воссоздания прямого угла; еще в более отдаленные времена был, по-видимому, известен китайцам. Но мы привыкли называть его «египетским».

2. Формулу для вычисления площади треугольника

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$



где  $p$  — полупериметр,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — стороны, с давних пор называют *формулой Герона* (I в. н.э. предположительно). А двумя веками раньше ее знал и применял Архимед.

3. Еще древнегреческими математиками были четко выявлены свойства положительных скалярных величин, послужившие основой для развития ими теории измерения величин. Важнейшее из свойств:

если  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) — два значения некоторой величины, то всегда существует такое натуральное  $n$ , что  $an > b$ .

Это свойство величин, первоначально сформулированное для отрезков: «Отложив достаточное число раз меньший из двух заданных отрезков, всегда можно получить отрезок, превосходящий больший из них», мы по привычке называем *аксиомой Архимеда*. Она обстоятельно изложена в работе Архимеда «Шар и цилиндр». Но еще за век до Архимеда эту аксиому уже применял *Евдокс Книдский*, сочинения которого, увы, не дошли до нас.

### Природа не смеет быть непредсказуемой

В работе «О равновесии...» Архимед формулирует такой постулат о рычаге, имеющем точку опоры точно в его середине и равные грузы, подвешенные на его концах (рис. 11):

равные грузы на равном расстоянии находятся в равновесии.

В самом деле, у рычага в указанных условиях нет «весомых оснований», чтобы опуститься правым концом или левым. Прямо как в притче о мучительном затруднении Буриданова осла: повернуть ли голову

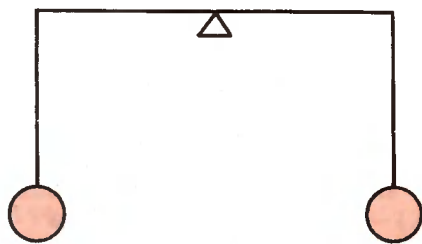


Рис. 11

вправо к охапке сена или влево — к такой же охапке сена?

А могла бы Природа в этих идеальных условиях вместо равновесия рычага предпочесть другое его состояние, скажем, такое: всегда опускается правый груз. Но ведь правым груз является, положим, для меня. А для моего друга, смотрящего на рычаг с противоположной стороны, он не окажется в предписанном Природой состоянии (опустился, как видит мой друг, не правый груз).

Получается, что предписанное рычагу такое состояние не явилось бы одним и тем же в общем случае — для любой позиции наблюдателя.

Признание нами постулата Архимеда верным полностью согласуется с нашим убеждением в том, что Природа не имеет оснований не допускать правильного предвидения (предсказания) об истинном положении рычага.

Счастлив в наш век, кому победа  
Далась не кровью, а умом,  
Счастлив, кто точку Архимеда  
Умел сыскать в себе самом.

Ф. Тютчев.

### Гугол, ангстрем и Вселенная

Гигантское число  $10^{100}$  американский математик Кастнер в 70-х годах XX века предложил назвать

*гуголом*. Посмотрим, хорош ли, удобен ли гугол как единица измерения количеств, реально существующих в границах нашей Солнечной системы:

1. Среднее расстояние от Земли до Солнца ( $1,49598 \cdot 10^{11}$  м) принимают за астрономическую единицу (а.е.) — ничтожная крошечка в масштабах гугола.

2. Плутон — наиболее удаленная от нас планета с диаметром орбиты, равным 80 а.е. ( $\approx 12 \cdot 10^{13}$  м).

3. Количество элементарных частиц, из которых состоят атомы всей Вселенной, физики оценивают числом, не превышающим  $10^{88}$ .

Для нужд микрокосмоса — элементарных частиц ядра атома — единицей длин (внесистемной) служила *ангстрем* ( $\text{\AA} = 10^{-10}$  м). Введена в 1868 году шведским физиком А. Ангстремом. Но и в таком масштабе числам, выражающим даже межзвездные расстояния, далеко до одного гугола. Так, например, диаметр нашей Галактики считается равным  $10^5$  световых лет, т. е. равен произведению  $10^5$  на расстояние, проходимое светом за один год. В ангстремах это всего лишь  $10^{31} \cdot \text{\AA}$ .

Расстояние до предположительно существующих весьма удаленных Галактик не превышает  $10^{40} \cdot \text{\AA}$ .

Древние мыслители называли *вселенной* пространство, ограничен-

ное видимой звездной сферой конечного радиуса. Центром этой сферы древние считали Землю, в то время как Архимед, равно как и Аристарх Самосский («Коперник древнего мира» — по Энгельсу), центр вселенной уступил Солнцу. Так вот, если эту вселенную заполнить песчинками, то, как показывают вычисления, выполненные Архимедом в «Псаммите» («Исчисление песчинок»), потребовалось бы около  $10^{63}$  штук песчинок — число, которое в  $10^{37}$  раз меньше гугола.

И все-таки разнообразие явлений даже только в земной органической жизни так велико, что нашлись физические количества, превзошедшие один гугол. Решая проблему обучения роботов восприятию голоса и пониманию ими словесных команд, исследователи выяснили, что вариации характеристик человеческих голосов достигают числа  $45 \cdot 10^{100} = 45$  гугол. Это сравнительно недавнее открытие существования количественного разнообразия модуляций человеческих голосов пытаются теперь освоить и криминалисты.

Немало и в самой математике примеров гигантских чисел, имеющих конкретную принадлежность. Например, позиционная запись простого числа Мерсенна  $2^{2^{16091}} - 1$  состояла бы из более, чем 65 тысяч цифр.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Архимед решил задачу, поставив слона на большой плот и отметив уровень, до которого плот погрузился в воду. Потом слона сняли с плотa и стали нагружать плот слитками золота до тех пор, пока плот не погрузился до отмеченного уровня. В этом положении вес плотa с золотом сравнялся с весом плотa со слоном, и, значит, золото весило столько же, сколько слон.

2. Если пузырь надут, то вес находящегося в нем воздуха уравновешен выталкивающей силой (закон Архимеда). Поэтому весы в обоих случаях показывали только вес пузыря. Взвесить воздух можно при помощи сосуда постоянного объема. Если сначала взвесить этот сосуд с воздухом, а затем без него, то разность весов даст вес воздуха в объеме сосуда.

3. Чаша со стаканом перетянет. Объяснение: это равносильно тому, что в стакан с водой долили воду в объеме, равном объему воды, вытесненному пальцем.

4. а) Пусть  $S$  — площадь арбелона, тогда

$$S = \frac{\pi}{8} (AC^2 - (AD^2 + CD^2)),$$

но

$$AC = AD + DC,$$

следовательно,

$$S = \frac{1}{4} \pi \cdot AD \cdot CD.$$

Так как

$$AD \cdot CD = BD^2,$$

то

$$S = \frac{1}{4} \pi \cdot BD^2.$$

б) Пусть  $B$  и  $F$  — середины большей и меньшей полуокружностей (рис. 12), тогда  $F$  — точка касания и  $FO_1 \perp AD$ , где  $FO_1 = r$  — радиус малой полуокружности. Аналогично  $BO = R$  — радиус большой полуокружности.

Точкой  $L$  он делит хорду  $MN$  пополам, и  $LO = FO_1 = r$ , а  $LN = 6$  см. Закрашенная площадь равна

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2).$$

Из треугольника  $OLN$  находим  $ON^2 - OL^2 = LN^2$  или  $R^2 - r^2 = 36$  (см<sup>2</sup>). Искомая площадь

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot 36 = 18\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

5. Фигура  $AnB_1BCmA$  (см. рис. 3), площадь которой нужно найти, состоит из фигур  $AnB_1CmA$  и  $B_1CBV_1$ . Но фигура  $AnB_1CmA$  равновелика фигуре  $ACBA$ , так как при добавлении к каждой из них фигуры  $AmCA$  получим полукруг. Поэтому фигура  $AnB_1BCmA$  равновелика сектору  $B_1AB$  с радиусом 2 и центральным углом  $30^\circ$ . Его площадь равна  $\frac{1}{12}$  площади круга радиуса 2:

$$S_{B_1AB} = \frac{1}{12} \cdot 4\pi = \frac{1}{3} \pi.$$

6. Коврики имеют равную длину. Показать можно так: предполагая, что на каждой лестнице ступени имеют равную между собой длину и равную между собой высоту, получаем:

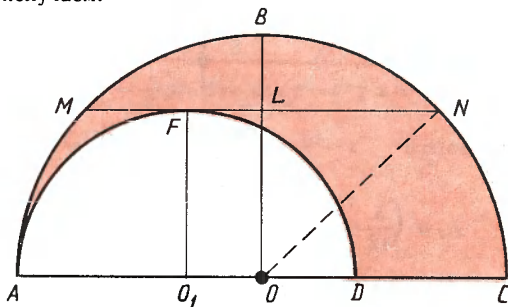


Рис. 12

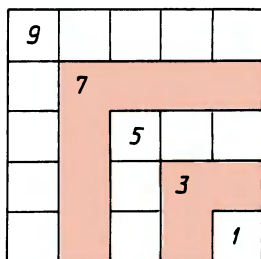


Рис. 13

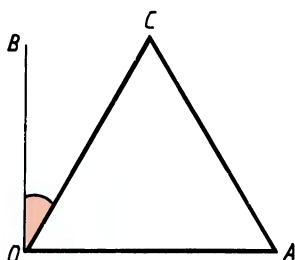


Рис. 14

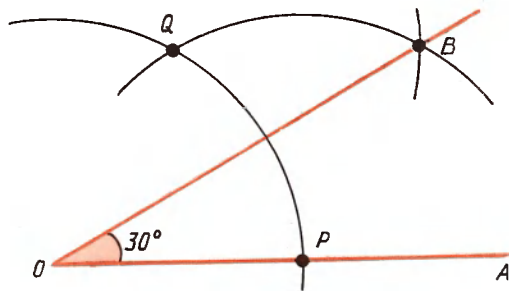


Рис. 15

$$x_{12} = \left( \frac{b}{12} + \frac{h}{12} \right) \cdot 12 = b + h;$$

$$x_{18} = \left( \frac{b}{18} + \frac{h}{18} \right) \cdot 18 = b + h,$$

$$x_{12} = x_{18}.$$

7. По формуле суммы  $n$  членов арифметической прогрессии  $\left( S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \right)$  имеем:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) &= \\ &= \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2. \end{aligned}$$

Но в школе Пифагора эту задачу решали геометрически на частных примерах. Квадрат (рис. 13) из  $n^2$  клеток образуется последовательным прикладыванием к клетке размером 1 «уголков» из 3, 5, 7, 9 и т. д. клеток. Для случая, изображенного на рисунке, получаем:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2.$$

8. На одной из сторон прямого угла  $AOB$  (рис. 14) откладывается произвольный отрезок  $OA$ . На  $OA$  как на стороне строится равносторонний треугольник  $AOC$ . Тогда

$$\angle BOC = \frac{1}{3} (\angle AOB).$$

9. Построен луч  $OA$  (рис. 15). Произвольным раствором ( $r = OP$ ) циркуля намечаем дугу окружности с центром в точке  $O$  и пересекаем ее в точке  $Q$  дугой окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $P$  ( $P$  — на луче  $OA$ ). Тем же раствором циркуля ( $r = OP$ ) строим дуги с центром в  $P$  и с центром в  $Q$  до пересечения в точке  $B$ . Она искомая. Легко обосновать, что воображаемый луч  $OB$  составляет с лучом  $OA$  угол, равный  $30^\circ$ . Вообразим треугольник  $OPQ$ , стороны которого равны  $r = OP$  по построению, откуда следует, что луч  $OQ$  составляет с лучом  $OA$  угол  $60^\circ$ . Теперь вообразим четырехугольник  $OQBP$ , все четыре стороны которого равны между собой по построению и  $\angle QOP = 60^\circ$ .

Следовательно,  $OQBP$  — ромб и его диагональ  $OB$  делит  $\angle QOP$  пополам, т. е. луч  $OB$  образует  $\angle 30^\circ$  с лучом  $OA$ .

10. Пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — искомые натуральные числа. По условию

$$\begin{aligned} a + b + c &= u^2, \\ a + b &= x^2, \quad b + c = y^2, \quad c + a = z^2, \end{aligned}$$



где  $x, y, z, u$  — целые числа. Складывая последние три равенства, получим:

$$2(a+b+c) = x^2 + y^2 + z^2,$$

далее

$$2u^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (*)$$

Это — диофантово уравнение второй степени с четырьмя переменными.

Упростим его при помощи замены переменных. Пусть

$$x = (1 - x_1)u, \quad y = (1 - y_1)u, \quad z = z_1u.$$

Тогда

$$2u^2 = u^2(x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 - 2y_1 + 1 + z_1^2),$$

или

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2x_1 + 2y_1.$$

Так как  $x_1, y_1, z_1$  — целые числа, то, очевидно, найдутся такие целые  $m, n$  и  $p$ , что

$$x_1 = \frac{m}{n} z_1, \quad y_1 = \frac{p}{n} z_1.$$

Тогда

$$z_1^2 \left( \frac{m^2}{n^2} + \frac{p^2}{n^2} + 1 \right) = z_1^2 \left( \frac{2m}{n} + \frac{2p}{n} \right),$$

откуда

$$z_1 = \frac{2n(m+p)}{m^2 + p^2 + n^2}, \quad x_1 = \frac{2m(m+p)}{m^2 + p^2 + n^2},$$

$$y_1 = \frac{2p(m+p)}{m^2 + p^2 + n^2}.$$

И далее:

$$x = (1 - x_1)u = \frac{p^2 + n^2 - m^2 - 2mp}{m^2 + p^2 + n^2} \cdot u,$$

$$y = (1 - y_1)u = \frac{m^2 + n^2 - p^2 - 2mp}{m^2 + p^2 + n^2} \cdot u,$$

$$z = z_1u = \frac{2n(m+p)}{m^2 + p^2 + n^2} \cdot u.$$

Теперь, полагая  $u = m^2 + p^2 + n^2$ , получим:

$$x = p^2 + n^2 - m^2 - 2mp, \quad y = m^2 + n^2 - p^2 - 2mp,$$

$$z = 2n(m+p).$$

Придавая параметрам  $m, n, p$  произвольные натуральные значения, можем получить любое количество «квartetов» целых чисел  $(x, y, z, u)$ , удовлетворяющих уравнению (\*)

Теперь для отыскания чисел  $a, b, c$  имеем три уравнения.

При этом не для всякой тройки значений  $m, n$  и  $p$  будут получаться положи-

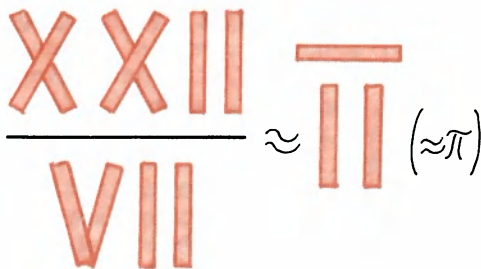


Рис. 16

тельные  $a, b$  и  $c$  (например, при  $m=1, p=2, n<6$ ). Но при  $m=1, p=2$  и  $n=6$  получится комплект (один из многих возможных) значений всех шести переменных, полностью удовлетворяющих условию задачи:

$$x=35, \quad y=29, \quad z=36, \quad u=41$$

и

$$a=840, \quad b=385, \quad c=456.$$

11. Правую часть равенства (рис. 16) надо воспринимать теперь как изображение числа  $\pi \left( \frac{22}{7} \approx \pi \right)$ .

$$12. 1) \quad Q = \frac{1}{2} \int_0^1 a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\varphi_1^3}{3} = \frac{a^2}{6} \varphi_1^3.$$

$$2) \quad \text{Так как } Q = \frac{a^2}{6} \varphi_1^3, \text{ а } \varphi_1 = \frac{r_1}{a}, \text{ то}$$

$$Q = \frac{1}{6a} \cdot r_1^3 \left( \frac{1}{6a} - \text{коэффициент пропорциональности} \right).$$

$$3) \quad Q_{\text{витка}} = \frac{a^2}{6} \cdot \varphi_1^3, \text{ где } \varphi_1 = 2\pi,$$

тогда

$$Q_{\text{витка}} \frac{a^2}{6} \cdot 8\pi^3 = \frac{4}{3} a^2 \pi^3.$$

$$13. \quad S = \frac{1}{2} yz. \text{ Так как } z = y \operatorname{tg} \alpha = y \frac{H}{R},$$

$$\text{то } S = \frac{H}{2R} y^2, \text{ где } y^2 = R^2 - x^2, \text{ поэтому}$$

$$S(x) = \frac{H}{2R} (R^2 - x^2)$$

$$\text{и } \frac{1}{2} V = \frac{H}{2R} \int_0^R (R^2 - x^2) dx.$$

$$\text{Итак, } V = \frac{2}{3} R^2 H.$$

# ГЕНИЙ XVIII ВЕКА — ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР



Леонард Эйлер (1707—1783)

## Языком математики о «тайных знаках» природы

Высокой поэзии дадим вначале слово. У поэта Олега Дмитриева есть замечательное лирико-философское стихотворение:

Следи, как с дерева слетает  
Листва,  
Следи, как каждый лист  
То в воздухе узор сплетает,  
То кружит, как мотоциклист,  
То падает, как камень рыжий,  
То по невидимой прямой  
Скользит стремительно —  
Как лыжник  
Несется с горочки зимой.

Не постигая тайных знаков,  
Мы с сожаленьем говорим:  
Сколь трепет листьев одинаков,  
Сколь их полет неповторим!

Но что за блажь —  
Срываясь с веток  
В прощальный путь, в печальный путь,  
Стараться как-то напоследок  
Свою необщность подчеркнуть?!

«Следи», — советует поэт, наблюдай, «сколь трепет листьев одинаков», как «их полет неповторим». Действительно, ведь так и должно начинаться постижение «тайных знаков» — закономерностей природы. Но, как отмечает Галилей, «природа говорит языком математики». А язык математики, зародившись в далекой древности, совершенствуется и от века к веку обогащается трудами и новыми открытиями великих математиков.

Так, Ньютоном и Лейбницем — классиками математики XVII века — были разработаны основы совершенно нового математического исчисления, названного впоследствии анализом бесконечно малых или дифференциальным и интегральным исчислением. С помощью производной и интеграла стало возможным решение задач, совершенно недоступных в предшествующие эпохи: о касательной, о максимумах и минимумах функции, о кривизне линии в разных ее точках, на вычисление площадей, объемов и координат центра тяжести таких фигур, для которых до этого нельзя было и мечтать это сделать. Именно на этом языке математики природа рассказала человечеству о законе тяготения, о законах движения физических тел и о многих других своих «тайных знаках».

## Великое наследие «учителя всех нас»

Только в следующем, XVIII веке исследования по математическому анализу получили первое систематическое изложение (в семи томах). Исследование и создание этого грандиозного произведения стало делом почти всей жизни Леонарда Эйлера — математика изумительной творческой силы, «учителя всех нас».

Это — наш учитель, наш наставник,  
Тот, кого я так боготворю,  
Перед нами раскрывает ставни  
Окон, выходящих на зарю.

*Леонид Вышеславский*

Действительно, и до сих пор школьники всех стран изучают алгебру и тригонометрию в немалой степени «по Эйлеру».

Эйлер был первым, кто дал, например, современное понимание логарифма. До Эйлера понятие логарифма трактовалось неудовлетворительно даже такими учеными, как Лейбниц, Иоганн Бернулли, и современником Эйлера — Д'Аламбером.

Эйлер ввел обозначение  $i$  для так называемой «единицы на множестве воображаемых (мнимых) чисел»:  $i = \sqrt{-1}$ , где  $i^2 = -1$ . Он же ввел обозначение  $f(x)$ .

Известна прямая Эйлера в геометрии треугольника и формула Эйлера для многогранника.

Эйлер и тригонометрию вывел на новый путь развития. Именно ему мы обязаны современным пониманием синуса, косинуса и других тригонометрических функций как функций произвольного аргумента. Он первым окончательно решил вопрос о знаках тригонометрических функций для любых значений аргумента, в частности, дал формулы приведения для углов, больших  $90^\circ$ , и упростил

все записи, введя единообразные обозначения тригонометрических функций, а также сторон и углов в треугольниках.

А студенты — будущие математики, физики, инженеры — постоянно встречают в современных учебниках и на лекциях идеи, методы, теоремы, формулы Эйлера. Это «подстановки Эйлера», упрощающие интегрирование некоторых иррациональных функций, «метод ломаных Эйлера» для приближенного решения дифференциальных уравнений, «эйлеровы интегралы» (бэта- и гамма-функции). В теории чисел — теорема Эйлера о сравнениях и «функция Эйлера» — число натуральных чисел, меньших данного числа и взаимно простых с ним, «константа Эйлера». В механике — «углы Эйлера» — они определяют взаимное положение различных систем координат. В гидродинамике при расчетах движения судов и самолетов — «число Эйлера» — отношение разностей давлений в двух характерных точках потока жидкости.

## «Как цветы в прекрасный венок...»

Эйлер вывел чудо-формулу

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

которую знаменитый французский математик Ж. Л. Лагранж назвал прекрасным открытием XVIII века. Эта формула широко используется в высшей математике и во многих современных технических науках. И посмотрите, какие изумительно изящные математические миниатюры она порождает. Например, при  $x = \pi$  получается такой шедевр:

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

В этот удивительной красоты минимум знаков, как цветы в прекрас-

ный венки, вплелись пять «господствующих» в математике чисел:

0, 1,  $e$ ,  $\pi$ ,  $i$ .

Эйлер сам предложил использовать букву  $e$  для обозначения иррационального — выражающегося бесконечной непериодической десятичной дробью — числа 2,7182818284... ( $e \approx 2,72$ ).

Именно к этому числу неограниченно приближается сумма

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В книге Мартина Гарднера «Математические досуги» (М.: Мир, 1972) есть шуточное стихотворение:

Это малое  $e$   
Так не нравится мне:  
Если честно сказать,  
Можно только назвать  
Неприличным его поведение.

А в книге Б. А. Кордемского «Математика изучает случайности» (М.: Просвещение, 1975) есть шуточное подражание этому стиху:

Это славное  $e$   $e = 2,71828\ldots$   
Помогает вполне  
Уяснить вам и мне  
Год рожденья Толстого Л. Н. ↑

## Степень магистра в 16 лет!

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 года в семье пастора, жившей в швейцарском городке Базеле. Начальное обучение он прошел дома под руководством отца — Пауля Эйлера. Добрый пастор прочил сыну духовную карьеру. Математикой занимался с ним между прочим, в качестве развлечения и для развития логического мышления. В 13 лет Леонард поступил на факультет искусств Базельского университета, где преподавалась и математика, и астрономия. Занятия по этим пред-

метам вел прославленный математик Иоганн Бернулли.

Будучи сам выдающимся ученым, Бернулли скоро заметил необычайные способности юноши и стал заниматься с ним отдельно.

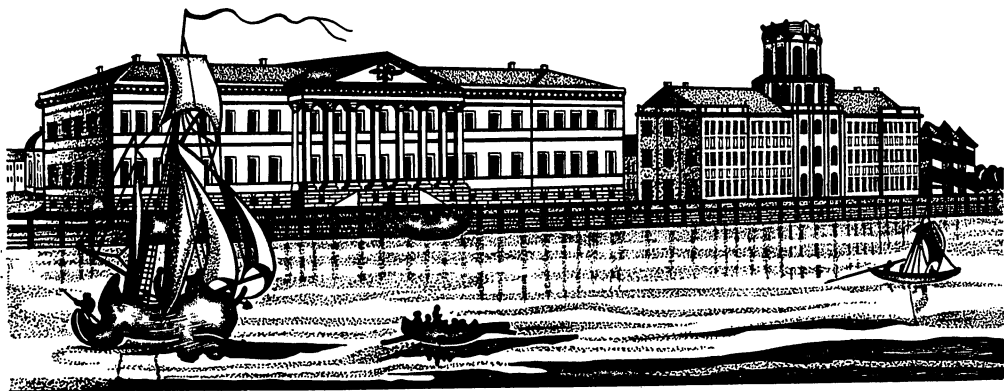
По субботам Иоганн Бернулли принимал Леонарда в своем доме для научных бесед, в которых участвовали и сыновья хозяина дома — Николай и Даниил Бернулли, приглашенные впоследствии на работу в Петербургскую академию наук и ставшие также выдающимися математиками. Между юношами возникла дружба, сыгравшая большую роль в жизни Эйлера.

Уже в 16 лет Эйлер получил степень магистра искусств. На испытании он произнес речь на латыни о сравнении философии Декарта и Ньютона. Научная степень дала Эйлеру право на преподавательскую должность, но на родине ему работы не нашлось ни в том году, ни в последующие годы. Понимая, что научная карьера в Швейцарии бесперспективна (в Швейцарии тогда говорили так: пусть учатся немцы, а у швейцарцев есть дела поважнее) ... Леонард, уступая настоянию отца-пастора, на всякий случай изучал богословие. К счастью для науки, богословие не стало его профессией.

## Гений Эйлера расцветает в России

Эйлеру было 17 лет, когда по указу Петра I в Петербурге открылась Академия наук, оказавшая впоследствии решающее влияние на развитие науки в нашей стране. Отечественных ученых тогда не было совсем. Пришлось привлекать иностранных. В числе первых были приглашены Николай и Даниил Бер-





Петербургская академия наук

нулли. По их рекомендации через три года после открытия Петербургской академии наук получил приглашение и двадцатилетний Эйлер.

В Базеле нашлись недоброжелатели России, пугавшие Эйлера: в Петербурге, мол, очень холодно и живут там дикари. Не без юмора им возражал И. Бернулли: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презируют и обижают».

В Петербург Эйлер прибыл в день смерти Екатерины I. Сразу же ему поручается преподавательская работа в учебных заведениях Академии наук: с гимназистами и студентами. Обладая превосходной памятью, он за несколько первых месяцев пребывания в Петербурге научился довольно хорошо говорить по-русски.

Большинство научных сотрудников Академии наук не слишком ревностно относились к своим обязанностям, которые к тому же еще и не определились четко, но Эйлер не пренебрегает никакими поручениями: делает доклады на академических

конференциях, читает публичные лекции, он активный член многих комиссий (например, мер и весов, устройства пожарных насосов и механических пил) и автор содержательного проекта системы обучения в гимназиях, автор «Руководства к арифметике для употребления в гимназии Императорской академии наук» (в двух томах) — второго в России солидного пособия после известного учебника Магницкого.

Исполняя эти многочисленные обязанности, Эйлер находил время и для своего главного дела — для математических исследований: ни один том ежегодника академии не выходил без нескольких работ молодого ученого. Благодаря своей феноменальной умственной работоспособности и целеустремленности в сочетании с природной одаренностью Эйлер в первые же годы петербургской жизни сложился как великий ученый. Определился его самобытный творческий путь в математическом анализе, механике, теории чисел и других научных направлениях, даже ... в музыке. Правда, по поводу его «новой теории музыки» (1739 г.) острили так: она слишком музыкальна для математиков и слишком математична для музыкантов.

Рост авторитета Эйлера у математиков всего мира нашел своеобразие отражение в письмах к нему его швейцарского учителя Иоганна Бернулли. Через год после отъезда Эйлера из Базеля в Петербург Бернулли пишет ему так:

*«Ученейшему и даровитейшему юному мужу Леонарду Эйлеру...»,*  
позже:

*«Знаменитейшему и остроумнейшему математику»,*

еще позже:

*«Несравненному Леонарду Эйлеру — главе математиков».*

И еще в одном письме:

*«Я посвятил себя детству высшей математики. Ты, мой друг, продолжишь ее становление в зрелости».*

Эйлер оправдал и эпитеты, и надежды своего учителя.

## **Жизнь хороша тем, что в ней можно заниматься математикой**

В 1733 году двадцатилетний академик Эйлер женится на Екатерине Гзель, которой тоже было 26 лет, дочери академического живописца, родом из Швейцарии, вывезенного Петром I из Голландии.

Вот один отрывок из стихотворения, сочиненного коллегами Эйлера для молодоженов:

В том усомниться мог ли кто-то,  
Что Эйлер удивит весь мир,  
Что только цифры и расчеты —  
Его единственный кумир.  
Теперь совсем в другом он мире,  
Где чувства, счастье и любовь.  
И то, что дважды два — четыре,  
Доказывать придется вновь!

Размеренная семейная жизнь, маленькие радости были необходимы Эйлеру для спокойной работы. Ника-

кие научные занятия не могли послужить поводом для пренебрежения семейными обязанностями.

Но и горестные события не обошли стороной Эйлера и его семью. Так, из тринадцати его детей выжили только пятеро — три сына (в будущем — физик, артиллерист и врач) и две дочери.

Через два года после женитьбы Эйлер потерял зрение на правый глаз от перенапряжения, когда выполнил в три дня правительственное задание, на которое другие академики требовали несколько месяцев.

Работа действительно была трудной, требовавшей огромного количества кропотливых вычислений. Но выполнить задание в срок было для него вызовом уму и чести, чести ученого. Перчатка брошена и должна быть поднята. По образному рассказу математика, профессора Н. И. Кованцова, забывая о сне и еде, Эйлер весь отдавался во власть чарующей гармонии строгих и последовательных зависимостей. Цифры... формулы... цифры... Эйлер размышляет: это — его жизнь. Без наслаждения музыкой математики она не имела бы смысла. Как хорошо сказал кто-то из старых геометров: жизнь хороша тем, что в ней можно заниматься математикой.

Работа была окончена в срок. Но оставила после себя страшный, чудовищный след — глаз, его правый глаз, так мучительно нывший в последнее время, не выдержал сверхчеловеческого напряжения и угас.

Через 33 года после женитьбы умерла жена. Вскоре Эйлер женился на ее сводной сестре — так было проще всего сохранить установившийся порядок в доме. Еще беда — сгорел дом и большая часть имущества.

Научись встречать беду, не плача:  
Горький миг — не зрелище для всех.

Знай: душа растет при неудачах  
И слабеет, если скор успех.

*Евгений Долматовский*

И действительно, никакие невзгоды не могли заставить Эйлера прервать активную творческую деятельность.

## **Не разрывая научных контактов с Петербургской академией наук**

В конце 1740 года власть в России перешла в руки регентши Анны Леопольдовны и ее окружения. В столице сложилась тревожная обстановка. «Дела стали идти плохо», — вспоминал потом Эйлер.

В это время прусский король Фридрих II задумал возродить основанное еще Лейбницем Общество наук в Берлине. Через своего посла в Петербурге король пригласил Эйлера переехать в Берлин, и Эйлер подает заявление об отставке:

«...того ради нахожусь принужден, как ради слабого здоровья, так и других обстоятельств, искать приятнейшего климата и принять... учиненное мне призывание».

Уезжая из Петербурга, он обещал сохранить контакты с академией, «а пришедши в лутчее здоровье, из немецкой земли опять в Россию возвратиться».

Берлинский период деятельности Эйлера длился 25 лет. Работал он, как и всегда, очень плодотворно; добрую половину своих монографий отсылал для печатания в изданиях Петербургской академии.

Именно здесь в 1749 году была впервые опубликована его «Морская наука», заложившая основы современной теории гидравлических реактивных турбин, подкрепленной примерным проектом такой турбины.

Однако Эйлер, прочно завоевав-

ший репутацию крупнейшего математика Европы, не встретил должного почета со стороны прусского короля. Мысль о возвращении в Россию становилась все более настойчивой.

К тому же взошедшая на русский престол Екатерина II неоднократно атаковывала Эйлера приглашением работать в Петербурге, обещая принять все его условия, включая желание получить звание вице-президента Академии наук. Позже Екатерина горделиво скажет: «Я уверена, что моя академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека».

Тщеславный, заносчивый король Пруссии не стал препятствовать отъезду Эйлера. Но, узнав, что багаж с личными вещами, книгами и рукописями Эйлера, отправленный морем из Пруссии в Петербург, затонул, Фридрих в письме к французскому математику Д'Аламберу с мстительной злорадностью не преминул упомянуть об этом:

«Господин Эйлер, до безумия влюбленный в Большую и Малую Медведиц, приблизился к северу, чтобы ему было удобнее наблюдать их. Корабль, нагруженный его икс, зет и его кака, потерпел крушение, и все пропало, а это жалко, потому что там было шесть фолиантов его сочинений, испещренных от начала до конца цифрами. По всей вероятности, Европа лишится приятной забавы, которая была бы ей доставлена чтением их».

## **Он «вычислял так, как человек дышит» (Араго)**

В 66 лет Эйлер почти ослеп также и на левый глаз, а к слепоте стала присоединяться и глухота. Но и



Эйлер



это не сломило его. В этот период жизни Эйлера племянник Даниила Бернулли писал: «Хотя он не может узнать никого в лицо, читать черное на белом и писать пером на бумаге, однако пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно... Потом они вписываются в большую книгу одним или другим из его адъюнктов, Фуссом или Головиным». (Николай Иванович Фусс — академик, ученик Эйлера и муж его внучки, Михаил Евсеевич Головин — ученик Эйлера, племянник М. В. Ломоносова, впоследствии автор удачного учебника тригонометрии.)

За последние полтора десятка лет жизни Эйлер продиктовал более 400 статей и 10 больших книг. Общее научное наследие Эйлера составляет около 900 работ. Полное собрание трудов, рассчитанное на 72 тома, охватывает все его работы по математике, механике, астрономии, физике и другим наукам.

### **«Эйлер перестал вычислять и жить» (Кондорсе)**

18 сентября 1783 года после обеда в кругу семьи Эйлер беседовал с одним из своих учеников. Внезапно он, почувствовав себя плохо, воскликнул: «Я умираю» — и потерял сознание. Через несколько часов он скончался от кровоизлияния в мозг в возрасте 75 лет. Окончилась жизнь одного из величайших математиков всех времен, «сделавшего свое бессмертное имя известным всей Европе» (из записи в протоколе Академии наук от 11 сентября 1783 года).

Дыхание прочь отлетело,  
Печатью замкнулись уста,  
А мысль, что покинула тело,  
В хорошие книги влита.

Похоронили Эйлера на Смоленском кладбище в Петербурге. Надпись на памятнике гласила:

*Здесь покоятся бранные останки  
мудрого, справедливого,  
знаменитого Леонарда Эйлера.*

Через 50 лет оказалось, что могила утеряна, и лишь случайно «обнаружили камень, погрузившийся мало-помалу от собственной тяжести в землю и поросший дерном».

В академии почувствовали себя неловко и решили установить новый памятник, «достойный знаменитого геометра», с краткой надписью:

*Леонарду Эйлеру — Петербургская академия.*

В 1957 году останки Эйлера были перенесены в Александро-Невскую Лавру, где и сегодня можно увидеть его могилу.

Хочу отметить я одно  
Из примечательных явлений:  
Когда от нас уходит гений,  
Оставив памяти зерно,  
С собой бессмертье он берет  
И формул пестрый хоровод.

У Эйлера было 38 внуков. Один из его потомков, Александр Александрович Эйлер, — профессор Санкт-Петербургского института железнодорожного транспорта.

В заключение приведу слова крупнейшего современного специалиста по истории математики, профессора А. П. Юшкевича:

«Благодаря деятельности Эйлера в России в XVIII веке был достигнут значительный прогресс в деле подготовки кадров ученых — математиков и педагогов, в создании учебной литературы. Этот прогресс явился предпосылкой того быстрого взлета исследований по математике в нашей стране, который начался в первой половине XIX столетия, когда



выступили со своими замечательными открытиями Н. И. Лобачевский, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев. Последний явился основателем петербургской математической школы, продолжившей и развившей научные традиции Эйлера».

Попрошаемся с Эйлером словами поэта Л. Вышеславского:

Тихо ночь легла ему на веки,  
Сжалась жизнь у времени в горсти,  
Но, чтоб уйти ему навеки,  
Надо нам, ученикам, уйти...

## Уголок дополнительных сообщений и задач

### Замысловатые маршруты и правила Эйлера

Вот пересказ отрывка из письма Эйлера от 13 марта 1736 года: «Мне была предложена задача об острове, расположенном в г. Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинута 7 мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь непрерывно обойти их, проходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто еще до сих пор не смог это сделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия ни алгебра, ни комбинаторное ис-

кусство. После долгих размышлений я нашел легкое правило, основанное на вполне убедительном доказательстве, с помощью которого можно во всех задачах такого рода тотчас же определить, может ли быть совершен такой обход через какое угодно число и как угодно расположенных мостов или не может». Кенигсбергские мосты схематически можно изобразить так (рис. 17):

Здесь  $A$  обозначает остров, а  $B$ ,  $C$  и  $D$  — части континента, отделенные друг от друга рукавами реки. Семь мостов обозначены буквами  $a, b, c, d, e, f, g$ .

Позже Эйлер придумал геометрическую модель к задаче о путешествии по мостам г. Кенигсберга (ныне это г. Калининград). На мо-

дели (рис. 18) земельные участки, разъединенные рукавами реки, как бы сжаты в точки  $A, B, C, D$  — назовем их *узлами* (или *вершинами*), а мосты как бы вытянуты в линии  $a, b, c, d, e, f, g$  — назовем их *ветвями* (или *ребрами*), соединяющими два последовательных узла. Узел назовем *четным*, если в нем сходится четное число концов ветвей, и *нечетным*, если в нем сходится нечетное число концов ветвей. Образовавшаяся фигура называется *сетью* (или *графом*).

Теперь задача состоит в том, чтобы выяснить условия, при которых можно обвести острием пера контур заданной сети, не отрывая перо от бумаги и проходя по каждой ветви один и только один раз (*одним маршрутом*). Если возможен обход всей сети одним маршрутом, то она называется *уникурсальной сетью*, а маршрут — *уникурсальным обходом*.

Условия существования уникурсального обхода, обоснованные Эйлером и названные им правилами, очень просты:

1. Сеть, не имеющая нечетных узлов, допускает замкнутый уникурсальный обход с началом в любой точке сети.

2. Сеть, имеющая два и только два нечетных узла, обходится уникурсально, если начать движение с

одного нечетного узла и закончить его в другом

3. Сеть, имеющая больше двух нечетных узлов, нельзя полностью обойти одним маршрутом.

Этим исследованием Эйлер положил начало новой отрасли математической науки — *топологии*, одним из разделов которой является *теория графов*.

**Задача 1.** Опираясь на правила Эйлера, докажите, что сеть, включающая 7 мостов древнего Кенигсберга, перекинутых через реку Прегель (ныне р. Преголя), не уникурсальна.

**Задача 2.** Достаточно было построить еще один мост через Преголю, например соединяющий участки  $B$  и  $D$  (рис. 19), и задача обхода одним маршрутом восьми мостов, каждого по одному разу, становится разрешимой. Постройте соответствующую сеть и покажите возможный маршрут.

**Задача 3.** Трехмерный граф в форме октаэдра представляет ли собой уникурсальную сеть?

**Задача 4.** Английский математик Л. Кэрролл (автор всемирно известных книг «Алиса в стране чудес», «Алиса в Зазеркалье» и др.) любил задавать своим маленьким друзьям головоломку на обход фигуры (рис. 20) единым росчерком

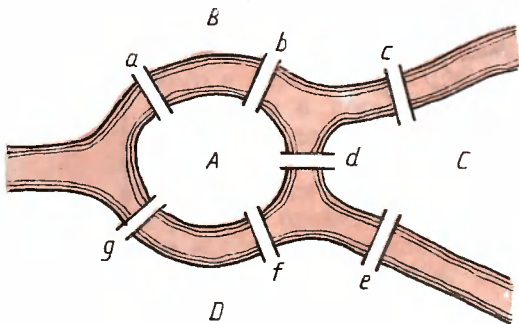


Рис. 17

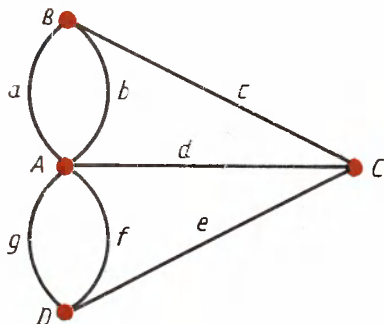


Рис. 18

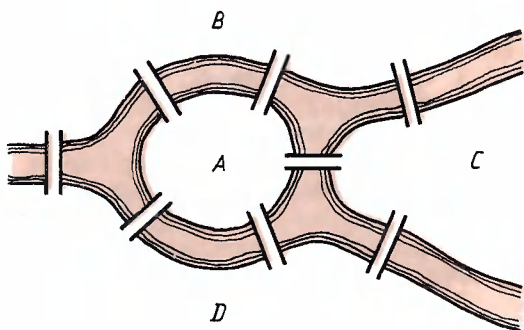


Рис. 19

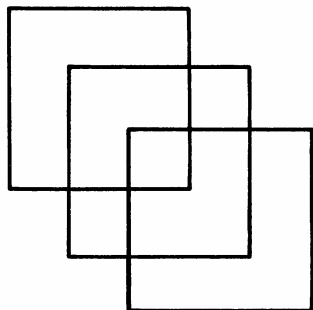


Рис. 20

пера и не проходя дважды ни одного участка контура. Пересечение линий допускалось. Такая задача решается просто.

Усложним ее дополнительным требованием: при каждом переходе через узел (считая узлами и точки пересечения линий на рисунке 20) направление обхода должно изме-

няться на  $90^\circ$ . (Начиная обход с любого узла, придется сделать 23 поворота.)

Задача 5. В одном из залов Дома занимательной науки в Санкт-Петербурге посетителям показывали схему мостов города (рис. 21).

Требовалось обойти все 17 мостов, соединяющих острова и берега

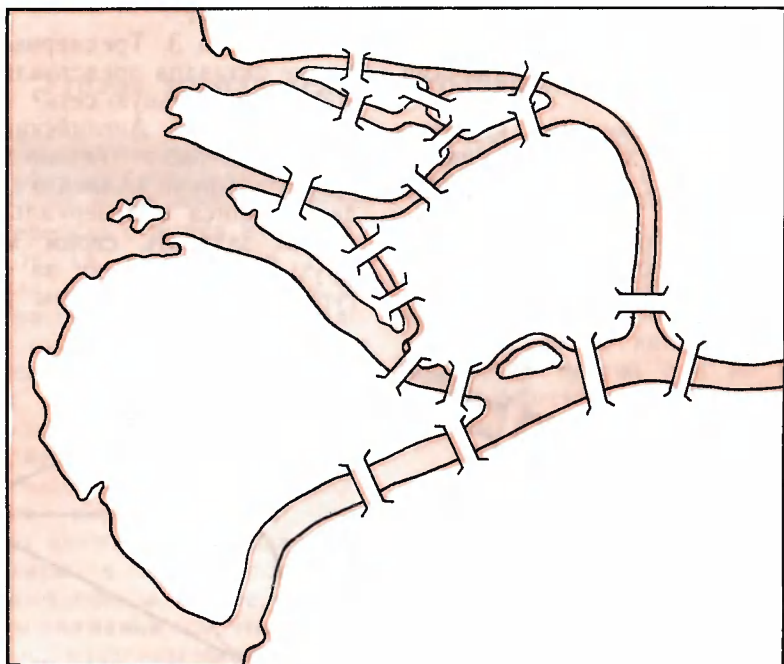


Рис. 21



Невы, на которых расположен Санкт-Петербург. Обойти надо так, чтобы каждый мост был пройден один раз.

И перерезавши кварталы,  
Всплывают вдруг из темноты  
Санкт-Петербургские каналы,  
Санкт-Петербургские мосты!

*Н. Агнiewicz*

Докажите, что требуемый универсальный обход всех мостов Санкт-Петербурга того времени возможен, но не может быть замкнутым, т. е. оканчиваться в пункте, от которого начинался.

Однако на своей копии рисунка вы сможете разработать и замкнутый обход, если позволите себе пройти дважды по каким-то двум мостам.

**Задача 6.** На рисунке 22 представлен эскиз одного из портретов Эйлера. Художник воспроизвел его одним росчерком пера (только волосы нарисованы отдельно). Где на рисунке расположены начало и конец универсального контура? Повторите движение пера художника (волосы и пунктирные линии на рисунке не включаются в маршрут обхода).

**Задача 7.** Павлик — наш одноклассник и заядлый велосипедист — изобразил на классной доске часть плана местности и поселка (рис. 23), где он жил прошлым летом. По рассказу Павлика, недалеко от поселка, расположившегося по берегам реки Оя, есть маленькое глубокое озерцо, питающееся подземными источниками. От него и берет начало Оя, которая при входе в поселок разделяется на две отдельные речушки, соединенные естественным каналом так, что образуется зеленый островок (на рисунке отмечен буквой А) с пляжем и спортплощадкой. Далеко за поселком обе речушки, сливаясь, образуют широкую реку.

Павлик утверждает, что, возвращаясь на велосипеде со спортивной

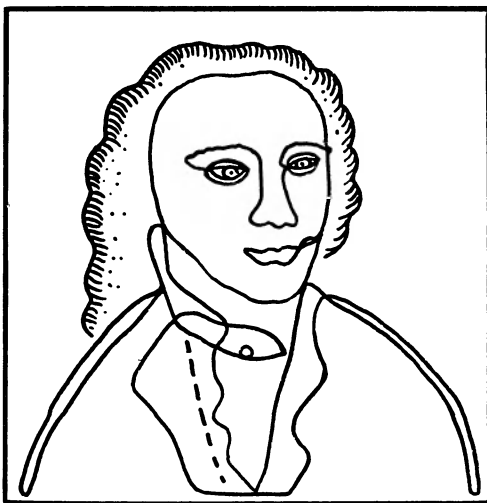


Рис. 22

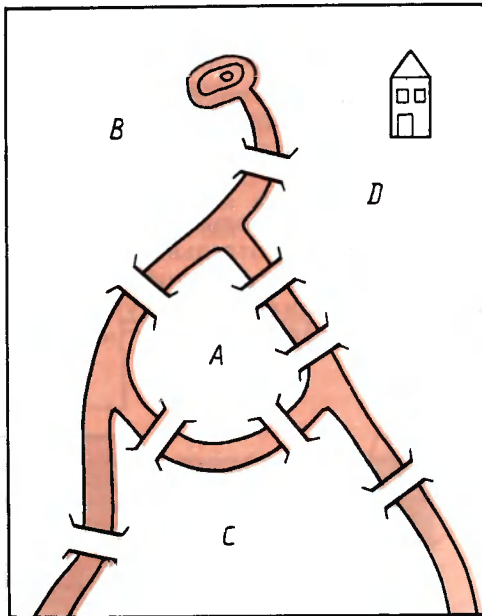


Рис. 23

площадки, находящейся на острове, домой (на рисунке буква  $D$ ), он проезжает по одному разу по всем восьми мостикам, показанным на плане, ни разу не прерывая движения. Наши знатоки теории таких головоломок отметили буквами  $A, B, C, D$  участки поселка, разьединенные речкой (участки — это узлы сети, мосты — ветви), и установили, что уникурсальный маршрут, начинающийся в  $A$  (нечетном узле), возможен, но закончиться он должен непременно в  $B$  — во втором нечетном узле, остальные два узла  $C$  и  $D$  — четные. Но ведь и Павлик говорит правду: его маршрут из  $A$  в  $D$  действительно пролегал по всем восьми мостикам и был уникурсальным. В чем же здесь дело? Как вы полагаете?

**Задача 8.** Чтобы обойти сеть, показанную на рисунке 18, достаточно двух отдельных маршрутов. Укажите оба уникурсальных обхода и придумайте доказательство более общему утверждению:

сеть, имеющую ровно  $2n$  нечетных узлов, можно полностью обойти по  $n$  отдельным маршрутам.

**Задача 9.** Сколько (минимально) потребуется отдельных уникурсальных маршрутов, чтобы обойти полностью шахматную доску по всем прямым, образующим на ней 64 клетки?

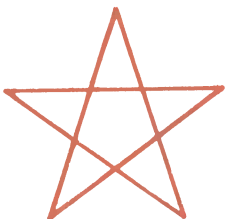


Рис. 24

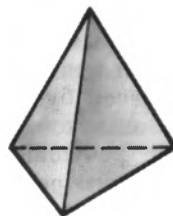
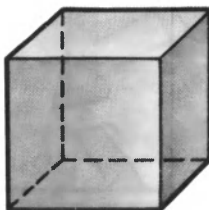
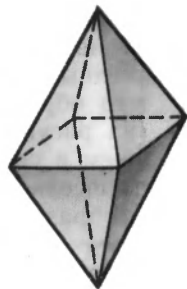


Рис. 25



**Задача 10.** На встрече группы хорошо и не очень хорошо знакомых состоялось много приветственных рукопожатий. Некоторые из нас пожали четное число рук, другие — нечетное. Например, я обменялся тремя рукопожатиями, а мой друг, математик, — девятью. Когда я сказал своему другу, что обменявшихся нечетным числом рукопожатий, кроме меня и его, было еще 5 человек, он ответил:

— Ошибаешься. Число людей, пожавших нечетное число рук, непременно должно быть четным.

Прав ли он?

### Удивительная формула Эйлера

Занимаясь сетями, Эйлер не только разработал условия уникурсального обхода, но и открыл красивое их свойство, доказав такую изящную теорему:

*Пусть на плоскости задана замкнутая сеть, состоящая из  $m$  узлов и  $n$  ветвей, каждая из которых соединяет какие-либо два узла, и пусть эти ветви делят плоскость на  $l$  областей, включая область, находящуюся вне сети, тогда*

$$m - n + l = 2.$$

Так, на фигуре пятиконечной звезды (рис. 24)  $m=10$ ,  $n=15$ ,  $l=7$  и  $10-15+7=2$ . На сети кенигсбергских мостов (см. рис. 18)  $m=4$ ,  $n=7$ ,  $l=5$  и  $4-7+5=2$ .

Замечательно, что формула остается верной, если от двумерных фигур перейти к трехмерным. Так, для любого выпуклого многогранника

$$B - P + G = 2,$$

где  $B$  — число вершин,  $P$  — число ребер,  $G$  — число граней.

Проверьте формулу Эйлера на кубе, пирамиде, октаэдре (рис. 25).

**Задача 11.** К каждому из трех отдельных огородных участков для поливки надо проложить по земле по одному шлангу от каждого из трех колодцев так, чтобы шланги не пересекались (но и не отрывались от поверхности земли). Если такая сеть возможна, то как бы она выглядела? (Рис. 26.)

**Задача 12.** (Имя *Leonhard Euler* в ребусе.) В немецкой транскрипции имя *Leonhard Euler* содержит девять различных букв. Каждая из них шифрует одну из девяти цифр в арифметическом ребусе, присланном из Германии:

$$\begin{array}{r} L E O N H A R D \\ - \quad \quad \quad E U L E R \\ \hline \end{array}$$

1 2 3 2 5 5 5 1

Найдите единственно возможное решение этого ребуса.

**Задача 13.** (*Старинная миниатюра из учебника Эйлера.*) Некто после смерти оставил несколько детей, доля которых при разделе наследства выражалась следующим образом:

первый получил 100 талеров и 0,1 остатка;

второй получил 200 талеров и 0,1 следующего остатка;

третий получил 300 талеров и 0,1 следующего остатка и т. д.

В конце концов наследство оказалось поделенным поровну между всеми детьми. Спрашивается: сколь велико было наследство и сколько талеров получил каждый?

**Примечание.** Возможны два приема решения задачи: построение алгебраической модели условия задачи (уравнение, система уравнений) и построение геометрической модели (график, диаграмма).

Подумайте и примените оба приема!

**Задача 14.** (*Окружность девяти точек.*) Докажите, что в произвольном треугольнике следующие 9 точек лежат на одной окружности: основания высот, основания медиан и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот треугольника с его вершинами.

Эту окружность девяти точек называют обычно *окружностью Эйлера*.

**Задача 15.** (*Прямая Эйлера.*) Докажите, что в произвольном треугольнике точка пересечения высот, точка пересечения медиан и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

Эту прямую называют *прямой Эйлера*.

**Задача 16.** (*«Посеем» любой треугольник, «вырастет» прямоугольный.*) Постройте произвольный треугольник, впишите и опишите окружности. Пусть их радиусы соответственно  $r$  и  $R$ , а  $d$  — расстояние между центрами этих окружностей. Тогда окажется, что треугольник

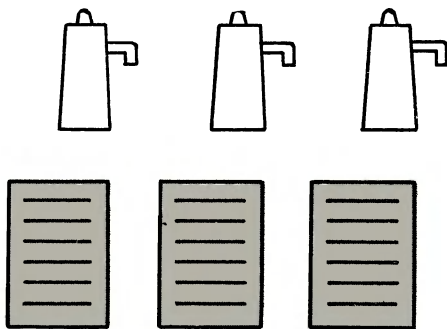


Рис. 26

с длинами сторон  $d$ ,  $r$  и  $R-r$  прямоугольный:

$$(R-r)^2 = d^2 + r^2,$$

или

$$R^2 - 2Rr = d^2.$$

Убедитесь в справедливости этого равенства, которое также называется *формулой Эйлера*.

### «Волшебная палочка» Эйлера

Начиная с одной точки, образуем две последовательности фигурных решеток:

а) *квадратных*;

б) *треугольных* (рис. 27).

Число узлов в каждой решетке назовем соответственно:

а) *квадратным числом*  $K_k$ :

1, 4, 9, 16, ...;

$$K_k = k^2, k = 1, 2, \dots; \quad (1)$$

б) *треугольным числом*  $T_n$ :

1, 3, 6, 10, ...;

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Продвигаясь вдоль этих последовательностей, вы найдете квадратные числа, совпадающие с треугольными. Первое совпадение:

$$K_1 = T_1 = 1.$$

Вскоре обнаружится и второе совпадение:

$$K_6 = 36 \text{ и } T_8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36.$$

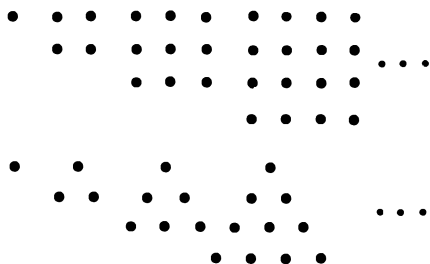


Рис. 27

До следующего совпадения придется «шагать» дальше:

$$K_{35} = 1225 \text{ и } T_{49} = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225.$$

Очевидно, что столь примитивный метод поиска не вдохновляет к обнаружению дальнейших совпадений. Но картина меняется, если проблему перевести на язык уравнения: требуется отыскать натуральные значения  $k$  и  $n$ , удовлетворяющие уравнению

$$k^2 = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3)$$

Любое количество частных решений этого уравнения можно найти с помощью «волшебной палочки» гениального чародея математики — Леонарда Эйлера. «Волшебная палочка», по мановению которой возникают значения  $k$ , а следом за ними и соответствующие значения  $n$ , обеспечивающие равенство  $K_k = T_n$ , — это изумительная формула Эйлера:

$$k_m = \frac{(3+2\sqrt{2})^m - (3-2\sqrt{2})^m}{4\sqrt{2}}, \quad (4)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Прелесть этой формулы в том, что она выражает натуральное  $k_m$  как функцию натурального  $m$ , хотя промежуточные действия производятся над иррациональными числами.

При  $m = 1, 2$  и  $3$  по формуле (4) получаются соответственно значения  $k = 1, 6$  и  $35$ , дающие ранее наблюдаемые нами квадратные числа  $K_1 = 1, K_6 = 36$  и  $K_{35} = 1225$ , являющиеся одновременно и треугольными числами:  $T_1, T_8, T_{49}$ .

Не менее симпатичной получается формула, выражающая натуральное  $n$  непосредственно как функцию натурального  $m$ :

$$n = \frac{-2 + (3+2\sqrt{2})^m + (3-2\sqrt{2})^m}{4}. \quad (5)$$

Вывод формулы (5) — простая задача: из равенства (3) выразить

$n$  через  $k$ , которое затем заменить правой частью равенства (4). При этом возникнет приятная необходимость преодолеть некоторые трудности преобразований. Сделайте!

Формула Эйлера — это стрела, «поражающая» заданную «цель» сразу. Пусть наша «цель» — какой-то один член последовательности квадратных чисел, являющихся одновременно треугольными, положим, десятый. Мы «поразим» эту «цель», положив в формуле (4)  $m=10$ .

Но существует и другой путь — заменить формулу «стрелу» *рекур-*

*рентной* формулой, позволяющей лишь ступеньками добираться до «цели» (положим, до  $k_{10}$ ), а именно найти сначала  $k_3$  по заранее известным значениям  $k_2$  и  $k_1$ , затем  $k_4$  по найденным  $k_3$  и  $k_2$ , ...,  $k_{10}$  по найденным  $k_9$  и  $k_8$ , вообще  $k_{m+1}$  по найденным  $k_m$  и  $k_{m-1}$ .

«Изобретение» подходящей рекуррентной формулы тоже увлекательная задача. Упростим вид формулы (4), положив

$$\frac{(3+2\sqrt{2})^m}{4\sqrt{2}} = a, \quad \frac{(3-2\sqrt{2})^m}{4\sqrt{2}} = b, \quad \text{тогда}$$

$$\begin{aligned} k_m &= a - b, \\ k_{m+1} &= a(3+2\sqrt{2}) - b(3-2\sqrt{2}) = 3(a-b) + 2\sqrt{2}(a+b), \\ k_{m-1} &= a(3+2\sqrt{2})^{-1} - b(3-2\sqrt{2})^{-1} = a(3-2\sqrt{2}) - b(3+2\sqrt{2}) = \\ &= 3(a-b) - 2\sqrt{2}(a+b). \end{aligned}$$

Складывая последние два равенства, получим:

$$k_{m+1} + k_{m-1} = 6k_m,$$

откуда

$$k_{m+1} = 6k_m - k_{m-1}, \quad (6)$$

где  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 6$ .

**Задача 17.** Найдите  $K_{10}$ , пользуясь формулой (4) и (еще раз) пользуясь рекуррентной формулой (6).

**Задача 18.** Сколько узлов расположено по периметру треугольной решетки  $T_n = K_{10}$ ?

**Задача 19.** Докажите, что рекуррентная формула

$$k_{m+1} = \frac{k_m^2 - 1}{k_{m-1}}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 6,$$

формирует ту же последовательность, что и формула (6).

**Первый рекордсмен  
среди «охотников»  
за дружественными парами**

Однажды Пифагор на вопрос, кого следует считать другом, якобы ответил так: «Того, кто является

моим вторым я, как числа 220 и 284». Видимо, какое-то необычайное свойство сблизило эти числа настолько, что сам Пифагор признал их парой дружественных чисел.

Вот это свойство:  $220 = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 \times 11$  — делится на 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110 (само число исключается из перечня делителей, тогда остальные делители называются *собственными*), а сумма всех собственных делителей числа 220 равна 284; в свою очередь,  $284 = 1 \cdot 2^2 \cdot 71$  делится на 1, 2, 4, 71 и 142 и сумма его собственных делителей равна 220 (убедитесь!). Значит, 284 — это как бы «второе я» числа 220, а 220 — как бы «второе я» числа 284, так как сумма собственных делителей одного числа равна второму числу и, наоборот, сумма собственных делителей второго числа равна первому. Красивый критерий дружественности пары чисел, не правда ли?

В средние века считалось, что талисманы с числами 220 и 284 способствуют укреплению любви.

Возможно, что именно Пифагор



и был первооткрывателем этой пары дружественных чисел — первой, наименьшей из возможных и единственно известной на протяжении более чем 15 последующих веков.

Вторую пару — не по величине, а по календарному времени — дружественных чисел: 17 296 и 18 416 — открыл марокканский ученый ибн аль-Банна (ок. 1300 года). Не зная этого, спустя более чем 300 лет (в 1636 году) эту же пару открыл Пьер Ферма.

Вскоре появилась третья «добыча» (третья пара) в результате изысканий выполненных Рене Декартом (в 1638 году), а время отмерило еще 100 лет, когда на математическом небосклоне засияла звезда гения Эйлера. С присущей

ему основательностью и энергией включился Эйлер в начавшуюся охоту — поиск дружественных чисел. В своих мемуарах «О дружественных числах» и «О сумме делителей» Эйлер излагает 5 различных методов выявления дружественных чисел. С примерным терпением и восхитительной виртуозностью он выполняет вычисления и преподносит изумленным современникам, занимающимся той же проблемой примерно с таким же увлечением, но безрезультатно, обильную добычу: ровно 59 пар дружественных чисел (1747—1750 гг.)!

Среди его «трофеев» оказались и пары нечетных дружественных чисел вида  $a \cdot p \cdot q$  и  $a \cdot r$  ( $p, q, r$  — простые числа), например:

$$\begin{aligned} A_1 &= (3^2 \cdot 7 \cdot 13) \cdot 5 \cdot 17, \\ A_2 &= (3^4 \cdot 5 \cdot 11) \cdot 29 \cdot 89, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= (3^2 \cdot 7 \cdot 13) \cdot 107, \\ B_2 &= (3^4 \cdot 5 \cdot 11) \cdot 2699. \end{aligned}$$

Найдите собственные делители пар  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_2, B_2)$  и убедитесь в том, что это действительно пары дружественных чисел.

По словам немецкого математика Вальтера Боро, дальнейшую историю поисков дружественных чисел можно сравнить «с охотой за экзотическими бабочками: найти новый экземпляр чрезвычайно трудно, но если вооружиться правильной методикой и необходимыми познаниями и проявить ловкость и настойчивость, то иногда все же удается его поймать (если к тому же еще и повезет). Очарование такой охоты и радость при каждой удаче, очевидно, и побуждали Эйлера не довольствоваться тремя, четырьмя примерами, а искать все новые и новые числа».

Следующим математиком после Эйлера, кто пополнил коллекцию дружественных чисел, но только од-

ной парой, был наш великий соотечественник П. Л. Чебышев (в 1851 году), а за ним — и тоже только одной парой (в 1866 году) — шестнадцатилетний итальянец Николо Паганини (тезка знаменитого скрипача). Он «изловил» вторую — по величине — пару дружественных чисел: 1184 и 1210. Но превзойти Эйлера по количеству новых «пойманных экзотических бабочек» никому из математиков не удавалось вплоть до последних десятилетий нашего времени.

Первым побил рекорд Эйлера бельгиец Поль Пуле (62 новые пары, к 1948 году), причем свою монографию Пуле озаглавил так: „*La chasse aux nombres*“ («Охота за числами»). Наконец, самой рекордной «добычей» достиг американец Элвин Дж. Ли (300 пар за 1968—1972 годы). И хотя он также оперировал методами Эйлера (в не-

сколько усовершенствованной форме), но при этом пользовался помощью ЭВМ.

К настоящему времени коллекция дружественных чисел значительно превысила 1000 пар, в ней имеются теперь даже двадцатипятизначные пары чисел.

Из этой коллекции ровно 13 пар дружественных чисел размещаются на отрезке  $[1; 100\ 000]$ :

1	220	284
2	1184	1210
3	2620	2924
4	5020	5564
5	6232	6362
6	10744	10856
7	12285	14595
8	17296	18416
9	63020	76084
10	66928	66992
11	67095	71145
12	69615	87633
13	79750	88730

До сих пор никто не изобрел формулу, позволившую получать

все пары дружественных чисел. Неизвестно даже, конечно или бесконечно множество таких пар.

Хотите получить свою собственную пару дружественных чисел? Тогда следуйте такому рецепту:

1) Возьмите пару дружественных чисел вида  $A = a \cdot u$ ,  $B = a \cdot s$  с простым  $s$ , например пару  $A = 220 = 2^2 \cdot 55$  и  $B = 284 = 2^2 \cdot 71$ .

2) Проверьте, является ли число  $p = u + s + 1$  простым. Если да и если не окажется, что  $a$  делится на  $p$ , то при  $n = 1, 2, 3, \dots$  справедливо следующее правило:

*если оба числа*

$$q_1 = (u + 1) \cdot p^n$$

*и*

$$q_2 = (u + 1) (s + 1) p^n - 1$$

*простые, то числа*

$$B_1 = A \cdot p^n \cdot q_1 \text{ и } B_2 = a \cdot p^n \cdot q_2$$

*дружественные.*

Итак, при  $n = 2$  числа  $q_1$  и  $q_2$  простые и

$$B_1 = 220 \cdot 127^2 \cdot 903\ 223,$$

$$B_2 = 4 \cdot 127^2 \cdot 65\ 032\ 127.$$

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Рисунки 17 и 18 показывают, что сеть имеет 4 узла и все они нечетные, следовательно, по правилу 3 сеть не уникарсальна.

2. К сети, показанной на рисунке 18, согласно условию присоединяем еще одну ветвь от  $B$  к  $D$  (рис. 28). Теперь сеть имеет только 2 нечетных узла  $A$  и  $C$ , следовательно, по правилу 2 она уникарсальна. Обход легко найдете самостоятельно. Если начнете его в  $A$ , то закончиться он должен в  $C$ , а если начнете в  $C$ , то заканчиваться он будет в  $A$ .

3. Все 6 узлов, образованных ребрами октаэдра, четные, следовательно, сеть уникарсальна.

4. Пример требуемого обхода дан на рисунке 29.

5. Постройте сеть по рисунку. Пользуясь правилами Эйлера, вы легко покажете возможность уникарсального обхода семнадцати мостов. Но если разрешено пройти дважды по каким-нибудь двум мостам, то возможен, например, маршрут, показанный на рисунке 30.

6. Начать обход надо с нечетного узла в уголке правого глаза (см. рис. 22) и закончить в нечетном узле брови над левым

глазом (пунктирные линии в сеть не входят). Все остальные узлы на рисунке четные.

7. Друзья Павлика упустили одну деталь из его сообщения: вблизи поселка было небольшое озеро — исток реки Оя. Хитрый Павлик «забыл» отметить его на плане. Добравшись из зоны  $A$  в зону  $B$  по уникарсальному маршруту, далее в зону  $D$  можно попасть не только по мостику, который уже один раз пройден, но и непосредственно — огибая озеро, что и делал Павлик (рис. 31). Учитывая это, «знатоки» теории должны были зоны, отмеченные ими буквами  $B$  и  $D$ , считать одним узлом.

8. Первый маршрут может быть, например, по ветви  $AC$  (см. рис. 18). Если эту ветвь исключить из сети, то узлы  $A$  и  $C$  становятся четными и в сети остаются только два нечетных узла:  $B$  и  $D$ . Значит, обход этой сети возможен с началом, например, в  $B$  и концом в  $D$ . Это второй маршрут, найдите его самостоятельно.

Докажем теперь, что сеть, имеющую  $2n$  нечетных узлов, можно полностью обойти по  $n$  отдельным маршрутам. Начнем обход из нечетного узла и продолжим его до тех пор, пока не достигнем узла, из которого

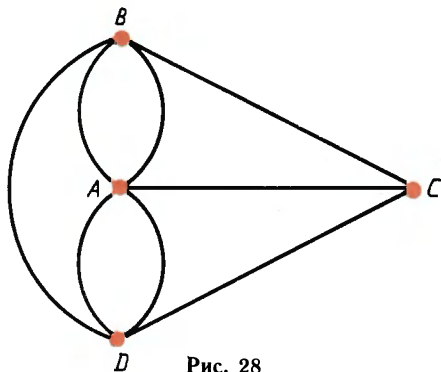


Рис. 28

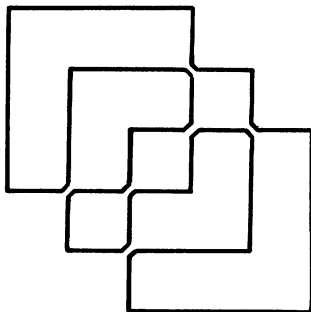


Рис. 29

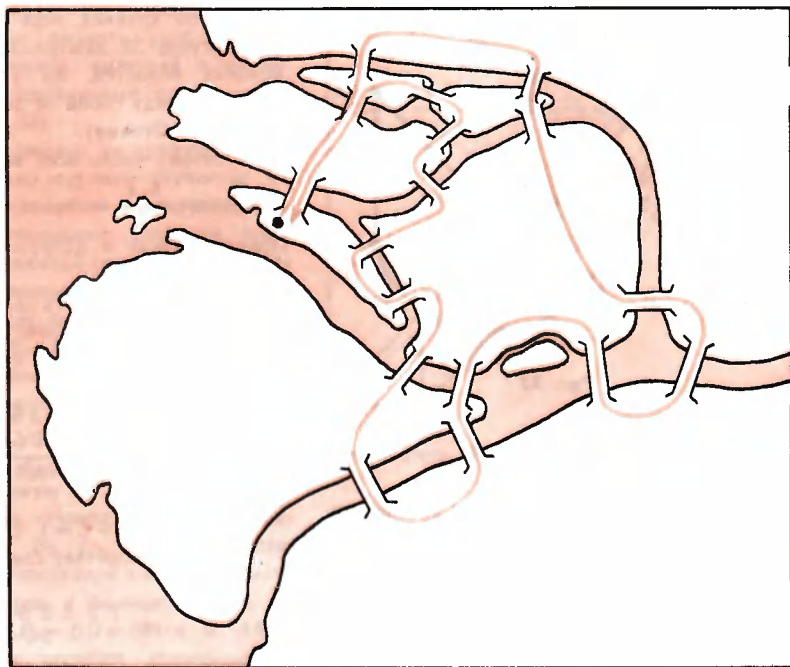


Рис. 30

уже нет выхода. Тогда этот второй узел обязательно нечетный: ведь из четного узла всегда есть выход, а проходя нечетный узел, мы используем первый из сходящихся в этом узле концов для входа, а второй для выхода; когда же мы заканчиваем маршрут в нечетном узле, захватывается только один конец. Если изъять из сети пройденный маршрут, останется сеть с  $2n-2$  нечетными узлами. Следовательно, если осуществить  $n$  аналогичных отдельных обходов, то останется одна или более сетей, все узлы которых четны. Но каждая из этих сетей имеет общий узел с одним из пройденных маршрутов и, следовательно, может быть включена в соответствующий маршрут. Таким образом, для полного обхода всей сети понадобится ровно  $n$  отдельных маршрутов. Отсюда следует, что если число нечетных узлов больше двух, то сеть нельзя обойти полностью одним маршрутом. Таким образом, мы попутно доказали справедливость правила 3 Эйлера.

9. 64 поля шахматной доски образованы сетью, имеющей 28 нечетных узлов. По теоре-

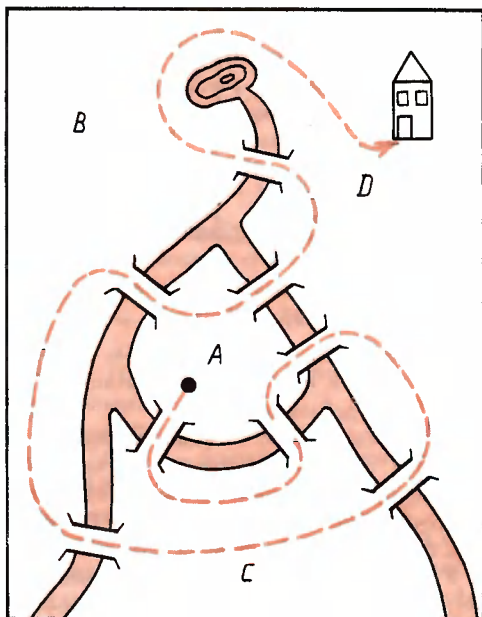


Рис. 31

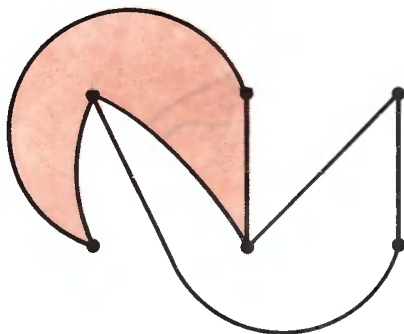


Рис. 32

ме, рассмотренной в задаче 8, потребуется 14 отдельных маршрутов.

10. Да, прав. Задачу можно интерпретировать сеть с числом узлов, равным числу людей, обменявшихся рукопожатием, а каждое рукопожатие рассматривать как ветвь, соединяющую два узла. Будем доказывать, что во всякой сети число нечетных узлов четно.

Пусть сеть имеет  $r$  ветвей, у которых, очевидно, всего  $2r$  концов. Пусть  $k_1$  — число узлов, от каждого из которых отходит только одна ветвь,  $k_2$  — число узлов, от каждого из которых отходят две ветви, аналогично получаем числа

$$k_3, k_4, \dots, k_n, \dots$$

Тогда  $k_1$  узлов содержат  $k_1$  концов,  $k_2$  узлов содержат  $2k_2$  концов,  $k_3$  узлов —  $3k_3$  концов и т. д., а всего концов

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + nk_n + \dots = 2r.$$

Отсюда следует, что  $k_1 + 3k_3 + 5k_5 + \dots$  четно, а потому и  $k_1 + k_3 + k_5 + \dots$  четно, что и требовалось доказать.

11. Предположим, что удалось проложить по земле от каждого колодца к каждому огородному участку по одному шлангу без пересечения хотя бы двух из них. Получилось бы 6 узлов (три колодца и три участка) и 9 ветвей, не пересекающихся попарно. Тогда в силу теоремы Эйлера ( $l = n - m + 2$ ) эти 9 ветвей разделят плоскость на  $9 - 6 + 2 = 5$  областей. Каждая из пяти областей огра-

ничена по крайней мере четырьмя ветвями (на рисунке 32 заштрихована одна из возможных областей, по условию огородные участки между собой не должны соединяться шлангами-ветвями).

Поэтому число всех ветвей должно быть не меньше  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ , а у нас 9 ветвей. Предположение о разрешимости задачи неверно.

12. Приятнее иметь дело с действием сложения вместо вычитания. Поэтому перестроим заданную разность в сумму:

$$\begin{array}{r} + 1232551 \\ \text{EULER} \\ \hline \text{LEONHARD} \end{array}$$

Очевидно, что  $L=1$ ,  $E=2$ ,  $O=3$ .

Ребус приобретает следующий вид:

$$\begin{array}{r} + 1232551 \\ \text{2 U 1 2 R} \\ \hline 123\text{NHARD} \end{array}$$

Анализируя последние два столбца, заключаем:  $R=7$ ,  $D=8$ . Из шестого столбца:  $A=6$ , из четвертого столбца:  $N=4$ . На долю  $U$  остаются значения 5, 9 или 0. Подходит  $U=0$ , откуда  $H=5$ .

Ответ:  $LEONHARD=12345678$ .

13. Первый способ: алгебраическая модель. Если обозначить долю каждого из детей через  $x$ , а все наследство через  $y$ , то доли наследников можно выразить так: первого

$$x = 100 + \frac{y-100}{10};$$

второго  $x = 200 + \frac{y-x-200}{10}$  и т. д.

По условию

$$100 + \frac{y-100}{10} = 200 + \frac{y-x-200}{10},$$

откуда  $x=900$ ,  $y=8100$ , а детей было 9.

Второй способ: геометрическая модель. Пусть  $n$  — число наследников. Так как



**Рис. 33**

Построим прямую  $DC_n$ . Она разобьет каждую из равных ступенек (кроме последней) точками  $D_1, D_2, D_3, \dots$  на 2 части. Согласно условию последний наследник получил  $n$  сотен талеров и больше остатка не было, поэтому  $C_n B_n = BD = 100 \cdot n$  и  $AB = n \cdot BD = 100n^2$ . Из подобия треугольников  $DC_n B_n$  и  $DD_1 B_1$  следует, что

$$D_2B_2 = 200 \text{ (талеров) и т. д.}$$

The diagram shows a triangle  $ABC$  with medians  $AD$ ,  $BE$ , and  $CF$  intersecting at centroid  $H$ . A red circle is inscribed within the triangle, tangent to the base  $AC$  at point  $D$ . The circle passes through point  $K$  on median  $BD$ . Other points  $L$  and  $M$  are marked on the circle, with  $L$  on median  $CF$  and  $M$  on median  $BE$ .

Рис. 34

$$BD = \frac{1}{10}AD, \text{ или } AD = 10 \cdot BD,$$
$$AB = 9 \cdot BD.$$
$$9 \cdot BD = n \cdot BD$$

14. Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ ,  $K$ ,  $L$  и  $M$  — середины отрезков  $BH$ ,  $AH$ ,  $CH$  и  $E$  — середина отрезка  $AC$ ,  $D$  — основание высоты треугольника  $ABC$ , опущенной из вершины  $B$  (рис. 34). Опишем окружность на отрезке  $KE$  как на диаметре. Так как  $KD \perp DE$ , то точка  $D$  лежит на окружности. Отрезки  $KL$  и  $LE$  являются средними линиями в треугольниках  $ABH$  и  $AHC$ . Значит,

$KL \parallel AB, LE \parallel CH.$

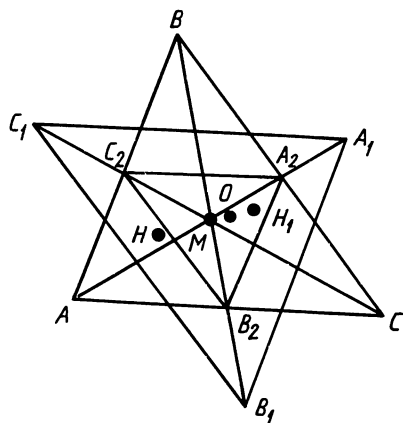


Рис. 35

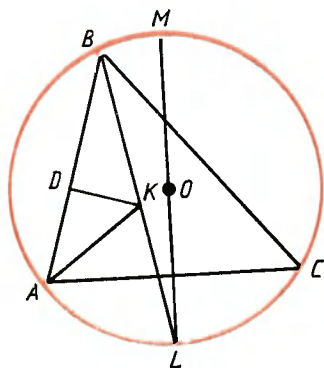


Рис. 36

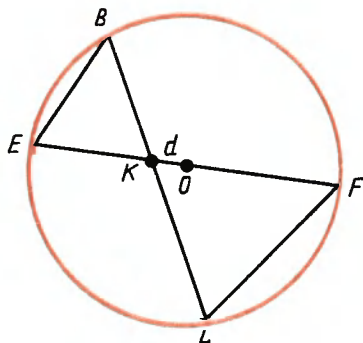


Рис. 37

Прямые  $AB$  и  $CH$  перпендикулярны, поэтому  $\angle KLE = \frac{\pi}{2}$  и точка  $L$  также лежит на построенной окружности.

Аналогично доказывается, что на этой окружности лежит и точка  $M$ .

Таким образом, окружность, описанная вокруг треугольника  $KLM$ , пересекает сторону  $AC$  в точках, одна из которых является основанием высоты, а другая — основанием медианы. Если произвести аналогичное построение для второй и третьей сторон треугольника, то получим ту же самую окружность. Это доказывает, что все 9 указанных в условии задачи точек лежат на одной окружности.

Если треугольник  $ABC$  равнобедренный, скажем,  $AB=BC$ , то точки  $D$  и  $E$  совпадают, а окружность Эйлера касается стороны  $AC$ .

15. Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ ,  $M$  — точка пересечения его медиан и  $O$  — центр описанной окружности (рис. 35). Построим треугольник  $A_1B_1C_1$ , симметричный треугольнику  $ABC$  относительно точки  $M$ . Пусть  $H_1$  — точка пересечения высот треугольника  $A_1B_1C_1$ , симметричная точке  $H$  относительно точки  $M$ . Точки  $H$ ,  $M$  и  $H_1$  лежат на одной прямой. Треугольник  $A_2B_2C_2$  подобен треугольнику  $A_1B_1C_1$  с коэффициентом подобия, равным  $\frac{1}{2}$ . Тогда для точки  $M$  имеем

$$MA_2 = \frac{1}{2} MA_1 = \frac{1}{2} AM.$$

Значит,  $A_2$  является основанием медианы, проведенной из вершины  $A$ , и лежит в середине отрезка  $BC$ . Аналогично  $B_2$  и  $C_2$  являются серединами отрезков  $AC$  и  $AB$ . Следовательно, точка пересечения высот треугольника  $A_2B_2C_2$ , являющаяся серединой отрезка  $H_1M$ , совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника  $ABC$ , т. е. с точкой  $O$ . Так как точки  $H_1$  и  $O$  симметричны относительно  $M$ , то точки  $M$ ,  $H_1$ ,  $O$  лежат на одной прямой.

Точка  $H$  лежит на прямой  $MH_1$ , следовательно, точки  $H$ ,  $M$ ,  $O$  лежат на одной прямой. Более того,  $HM:OM = H_1M:OM = 2$ .

16. Пусть  $O$  — центр окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ , и  $K$  — центр вписанной окружности (рис. 36). Продолжим отрезок  $BK$  до пересечения с описанной окружностью в точке  $L$ . Вычислим двумя способами произведение  $BK \cdot KL$ .

Во-первых, проведем диаметр  $LM$  описанной окружности и опустим из точки  $K$  перпендикуляр  $DK$  на сторону  $AB$ . Прямоугольные треугольники  $BDK$  и  $MAL$  подобны (углы  $ABL$  и  $AML$  опираются на одну дугу окружности и потому имеют одинаковую величину). Значит,

$$DK: BK = AL: ML, \text{ или } BK \cdot AL = DK \cdot ML = 2Rr.$$

Докажем теперь, что  $AL = KL$ . Поскольку точка  $K$  лежит на биссектрисах углов  $BAC$  и  $ABC$ , а углы  $LAC$  и  $LBC$  опираются на одну дугу, то

$$\begin{aligned} \angle KAL &= \angle KAC + \angle LAC = \\ &= \angle KAC + \angle LBC = \frac{1}{2} (\angle A + \angle B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle AKL &= \angle KAB + \angle KBA = \\ &= \frac{1}{2} (\angle A + \angle B). \end{aligned}$$

Значит, треугольник  $AKL$  равнобедренный,  $AL = KL$  и

$$BK \cdot KL = 2Rr.$$

Проведем теперь через точку  $K$  диаметр  $EF$  (рис. 37). Треугольники  $BEK$  и  $LFK$  подобны по трем углам.

Следовательно,

$$BK: EK = KF: KL,$$

или

$$\begin{aligned} BK \cdot KL &= EK \cdot KF = (R - d)(R + d) = \\ &= R^2 - d^2. \end{aligned}$$

Сравнивая найденные выражения для  $BK \cdot KL$ , получим формулу Эйлера, которая и доказывает существование прямоугольного треугольника со сторонами  $d$ ,  $r$  и  $R - r$ .

$$17. K_{10} = 7\,997\,214.$$

$$\begin{aligned} 18. n &= 11\,309\,768. \text{ По периметру решетки} \\ T_n &\text{ расположен } 11\,309\,768 \cdot 3 - 3 = \\ &= 33\,920\,301 \text{ узел.} \end{aligned}$$

# НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ — ВЕЛИКИЙ РЕФОРМАТОР ГЕОМЕТРИИ



Н. И. Лобачевский (1792—1856)

В е д у щ и й. 1 декабря 1792 года в семье землемера Ивана Максимовича Лобачевского родился мальчик Коля — будущий великий геометр Николай Иванович Лобачевский, совершивший революционный переворот в геометрии и философии, наш «Коперник геометрии», как назвал его английский математик Клиффорд. Николаю не исполнилось еще полных десяти лет, когда умер его отец. Осталась Прасковья Александровна Лобачевская с тремя малолетними сыновьями без средств.

Николай — светлоглазый мальчик с высоким лбом и тонким изящным носом — был средним по возрасту. Потребовались энергичные усилия его мамы, чтобы добиться зачисления сыновей в Казанскую императорскую гимназию на казенный счет.

У ч е н и к. Кажется, при поступлении в гимназию надо было еще экзамен выдержать успешно?

В е д у щ и й. А как же! На вступительном экзамене девятилетнему Коле Лобачевскому предложили решить такую задачу: бассейн получает воду из четырех труб; первая наполняет его за 1 час, вторая — за 2 часа, третья — за 3 часа, а четвертая — за 4 часа. Сколько потребуются времени для наполнения бассейна, если все четыре трубы открыты одновременно?

Коля мгновенно решил задачу в уме! Стали задавать ему более сложные задачи. Мальчик на лету схватывал условие и сразу давал правильный ответ. Учитель математики уже на экзамене понял, что в гимназию поступает весьма незаурядный человек!

Затем предложили Коле прочитать любимое стихотворение.

У ч е н и к. Интресно, что же он выбрал?

В е д у щ и й. Не только интересно, но и поразительно! Он громко и уверенно продекламировал по-латыни отрывок из стихотворения древнеримского поэта Горация «*Ad Melipomen*» («К Мельпомене»).

— А русские стихи знаешь? — спросил преподаватель словесности.

— Стихотворение Михаила Васильевича Ломоносова, — тихим голосом объявил Коля и, немного подождав, начал выразительно:

Случились вместе два астронома в пиру  
И спорили весьма между собой в жару.

Один твердил: Земля, вертясь,

круг Солнца ходит



Вид Казани

Другой — Земля с собой планеты водит.

Один Коперник был, другой слыл

Птолемей...

Живой, серьезный, темпераментный, энергичный, весь в мать, Николай учился в гимназии, а затем и в университете очень успешно, с большим трудолюбием. Кроме обязательных — латинского и немецкого — языков, он самостоятельно изучил французский и греческий настолько, что мог читать серьезные книги по математике и философии, которые брал в гимназической библиотеке.

В редкие часы, свободные от занятий, или готовясь к уроку словесности, а иногда и на скучных для него уроках, сочинял стихи.

Ученик. Вот одно:

Колумб отважно вдаль стремился,  
Ища желанных берегов,  
Но долг путь. И становился  
Слышнее ропот моряков.

А он глядит на океан,

В волненьи тяжко дышит грудь.

Вопрос — исполню ль я свой план

И верно ль мой намечен путь?..

И вот сбылись его мечты:

— Земля! — воскликнул человек.

— Колумб! — кричат матросы. — Ты

Прославил родину навек!

Ведущий. Юный Лобачевский был порядочным озорником, но в обращении с товарищами и учителями-воспитателями честен, прям, не терпел двуличия и предательства.

Гимназию он оканчивает пятнадцатилетним юношей и в тот же год (1807) становится студентом университета, всего лишь два года назад открытого в Казани.

Материальные лишения он переносил стойко, но однажды ради выигрыша денежного пари (для приобретения учебников) решился на озорство, за которое его чуть-чуть не разжаловали из студентов в солда-



ты: сидя на корове, проскакал по университетскому парку.

Ученик (декламация или сцена в лицах).

...С шашкой мчит городской.—

«Анархист, наверно?»

Темнорус и светлоглаз, парень

смотрит смело.

Он не опускает глаз, хоть и  
взят за дело.

— Я побился об заклад... (Чин  
возвысил брови.)

Проскачу, мол, через сад, сидя  
на корове!—

Чин присвистнул: «Эскапада!»

Да зачем же это надо?»

— На учебник денег нет,— парень  
выдал в ответ.

— Ты, однако же, чудак! Очумел,  
брат, что ли?

А зовут тебя-то как?

— Лобачевский Коля. [3]

Ведущий. В университете Лобачевский сразу же обратил на себя внимание профессоров исключительными успехами по математике, оригинальностью мышления. Самостоятельно усвоив передовые философские учения XVIII века, он открыто выражал презрение ко всему показному, насаждавшемуся в университете.

Учащиеся (декламация или сцена в лицах).

— Лобачевский, но к чему же

Накануне торжества,

Где Вам стать ученым мужем,

Заявлять такое нужно:

Дескать, нету божества!..

Лобачевский, Вы не мальчик,

Вам двадцатый уж грядет...

— Я не мог тогда иначе.

— Лобачевский...

Что Вас ждет?

И профессор, схмурав брови,

Продолжал греховный счет:

— Вот по парку на корове

Мчался задом наперед.

М-да-а... — Профессор седоватый,

Затаив в улыбке грусть,

Продолжал:

— Эх, вы, таланты,

Заждалась давно вас Русь,—

И, тряхнув бородкой редкой,

К Лобачевскому привстал:

— Ах, Вы, Боже мой, ведь ректор

Чуть Вас в рекруты не сдал.

Трудно, трудно отстояли

Мы Вас, батенька Вы мой.

Вы должник наш постоянный,

Да-с,

Должник наш с головой.

Ну чего уж там, чего там...

Что вы можете сказать?

Вы, мой друг, должны работой,

Да-с, работой доказать.

[2]

Ведущий. В 19 лет Лобачевский оканчивает университет и ему присуждается степень магистра наук (магистр, адъюнкт — младшие ученые степени в российских университетах), а в 24 года — уже профессор математики.

Начался период полного раскрытия его незаурядной личности, период изумительно многостороннего и страстного увлечения преподавательской работой профессора. Началось и быстро совершенствовалось научное творчество, исключительное по силе отвлеченного математического воображения, приведшее Лобачевского к великому открытию в геометрии, направленному в будущее науки, определившему лицо всех физико-математических наук нашего времени.

Как известно, в III веке до нашей эры греческий геометр Евклид в своей книге «Начала» сформулировал систему аксиом, из которых последовательно, одна за другой, выводятся все основные теоремы геометрии. И никогда не получалось двух противоречащих друг другу

теорем, доказательства которых равноправно вытекали бы из принятой системы аксиом. Это означает, что аксиоматика Евклида не противоречива.

Аксиомы евклидовой геометрии являются продуктом повседневных человеческих наблюдений, кроме одной — аксиомы о параллельных, называемой также пятым постулатом. Кто сформулирует эту аксиому?

Ученик. Насколько я помню: через точку вне прямой можно провести в их плоскости только одну прямую, не пересекающую данной.

Ведущий. У Евклида в «Началах» несколько иная формулировка, но суть та же. И вот эту аксиому, в отличие от остальных, никаким опытом не подтвердишь, не опровергнешь, ведь на практике воспроизводимы лишь отрезки прямых, но никогда сами прямые во всей их бесконечной протяженности.

Ученик. Но если этот пятый постулат непроверяем физически, то, может быть, следовало исключить его из числа аксиом и доказывать как теорему, опираясь на остальные аксиомы?

Ведущий. Так оно и было. Веками длились попытки придумать доказательство — не удавалось никому. В тайну этих неудач именно и проник Н. И. Лобачевский глубоко и окончательно: пятый постулат недоказуем и от господствовавшего более двух тысяч лет убеждения, что евклидова геометрия есть единственная мыслимая система геометрического познания мира, необходимо отказать.

1-й ученик.

Вечный... пятый. От Евклида

И до этих вот снегов

Постулат, как черный идол,

В жертву требует умов...

2-й ученик.

«Постулат недоказуем!»

Даже страшно произнести.

Ах, догматики! Грозу им

Принесет такая весть.

[2]

3-й ученик. На уроках геометрии учитель говорил нам, что Лобачевский создал «неевклидову геометрию», в которой через точку можно провести более одной линии, не пересекающей данную прямую.

Ведущий. Верно. Лобачевский заменил евклидов пятый постулат более общей аксиомой параллельности, сохранив прочие аксиомы и постулаты. Чтобы легче было понять смысл аксиом Лобачевского, возьмем прямую  $AB$  (рис. 38) и вне ее точку  $C$ . Пусть  $\angle CAB$  прямой.

Построим луч  $CD$ , пересекающий прямую  $AB$  в точке  $D$ , лежащей вправо от точки  $A$ , и вообразим, что он вращается против часовой стрелки. По мере вращения луча  $CD$  непосредственное наблюдение пересечения его с  $AB$  становится неосуществимым. По этой причине будет логически правомерным изменить наше представление о прямой линии и луче, которое теперь позволило бы нам вообразить, что луч  $CD$  в какой-то момент своего вращения «отрывается» от прямой  $AB$ , т. е. перестает иметь с ней общую точку.

Тогда «прямую» ( $aa'$ ), содержащую луч, впервые «оторвавшийся» от  $AB$ , назовем *прямой, парал-*

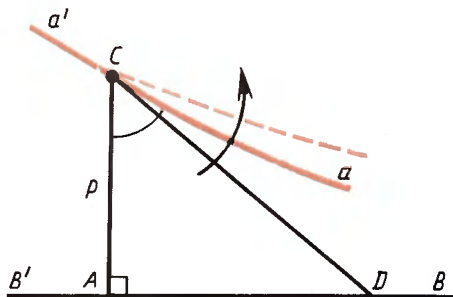


Рис. 38

лельной прямой  $AR$  в направлении луча  $AB$ .

Рассмотрев симметрию с осью  $AC$ , видим, что есть «прямая» ( $bb'$ ), симметричная «прямой» ( $aa'$ ) и проходящая через точку  $C$  (рис. 39). Ясно, что и эту «прямую» ( $bb'$ ) следует считать параллельной  $AB$ , но уже в направлении луча  $AB'$ . Следовательно, через  $C$  проходят две «прямые», параллельные прямой  $BB'$ .

С каждой из этих «прямых» луч  $CA$ , перпендикулярный прямой  $B'B$ , образует угол  $\pi(p)$ , названный Лобачевским *углом параллельности*. Угол  $\pi(p)$  зависит от длины  $CA = p$  и имеет следующее свойство: все прямые, проходящие через  $C$  и образующие с перпендикуляром  $CA$  угол, меньший  $\pi(p)$  (например, прямая  $t$  на рисунке 39), пересекают  $B'B$ , все остальные «прямые», проходящие через  $C$  (например,  $s$  на рисунке 39), не пересекают  $B'B$ , их называют *расходящимися прямыми* или *сверхпараллелями* к прямой  $B'B$ . Через  $C$  проходит бесконечное множество таких «прямых».

В частном случае, когда  $\pi(p) = 90^\circ$ , получается постулат Евклида и соблюдаются все предложения обычной геометрии, «употребительной», как называл ее Н. И. Лобачевский.

Угол  $\pi(p)$  возрастает и приближается к прямому углу при прибли-

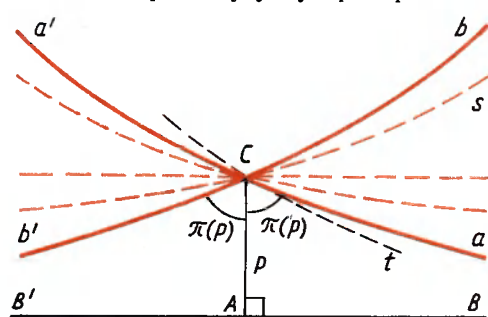


Рис. 39

жении точки  $C$  к прямой  $B'B$  (доказательство (см. на с. 64)).

Из допущения, что  $\pi(p) < 90^\circ$ , вытекают совершенно иные следствия, составляющие содержание новой геометрии, так же непротиворечивой, как и евклидова геометрия, но значительно точнее, чем евклидова, отображающей пространственные геометрические и физические соотношения, например, за пределами мировых областей «средней величины».

Оказалось также, что взаимосвязь пространства и времени, открытая Х. Лоренцом, А. Пуанкаре, А. Эйнштейном и Г. Минковским и описываемая в рамках специальной теории относительности, имеет непосредственное отношение к геометрии Лобачевского. Например, в расчетах современных синхрофазотронов используются формулы геометрии Лобачевского.

Такую геометрию Лобачевский сначала назвал «воображаемой», а потом (в конце жизни) — «пангеометрией», т. е. всеобщей геометрией. Теперь ее во всем мире называют «геометрией Лобачевского».

Ученик.

Был мудрым Евклид,

Но его параллели,

Как будто бы вечные сваи легли.

И мысли его, что как стрелы летели,

Всегда оставались в пределах Земли.

А там, во вселенной, другие законы,

Там точками служат иные тела.

И там параллельных лучей миллионы

Природа сквозь Марс, может быть,

провела.

[1]

Ведущий. Из понимания параллельности «по Лобачевскому» вытекает много диковинных на первый взгляд, но строго обоснованных следствий.

Ученик. Каких?

Ведущий. Например, в пространстве Лобачевского параллельные прямые неограниченно сближаются в направлении параллельности (рис. 40) и потому существуют «бесконечные треугольники», стороны которых попарно параллельны (рис. 41), но нет подобных многоугольников.

Ученик.

Скоро порохом вспыхнет рассветная  
тишь.

Ты на четкий чертеж неотрывно  
глядишь.

После встал, потянулся устало.  
Вечность тайну тебе нашептала,  
И душой изумленной увидел ты то,  
Что доселе не знал и не ведал

никто:

Параллели стрелою нацелены в высь,  
Параллели пронзают межзвездные  
дали.

Параллели — ты, чуешь? — стремятся  
сойтись,

Только сразу такое постигнешь  
едва ли.  
[3]

Ведущий. В геометрии Лобачевского интересна и важна такая теорема: «Сумма углов треугольника всегда меньше  $180^\circ$ ».

Ученик. Позвольте на минутку перебить Вас. У Данте есть такие строки:

Как для смертных истина ясна,  
Что в треугольник двум тупым  
не влиться.

Теперь-то нам понятно, что не может быть двух тупых углов не только в нашем «земном» треугольнике, но и в «звездном» треугольнике геометрии Лобачевского...

Ведущий. Очень интересно, но задержимся еще немного на треугольнике в геометрии Лобачевского.

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы треугольника, тогда число

$$\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$$

называют «дефектом треугольника»

и справедлива поразительная формула, выведенная Н. И. Лобачевским,  $\delta = \frac{S}{R^2}$ , где  $S$  — площадь треугольника, а  $R$  — число, одинаковое для всех треугольников. Величину  $R$ , имеющую размерность длины, называют *радиусом кривизны пространства Лобачевского*, а отрицательную величину  $k = -\frac{1}{R^2}$  — *кривизной* этого пространства.

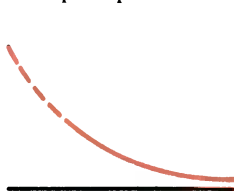


Рис. 40

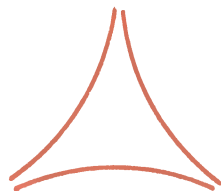
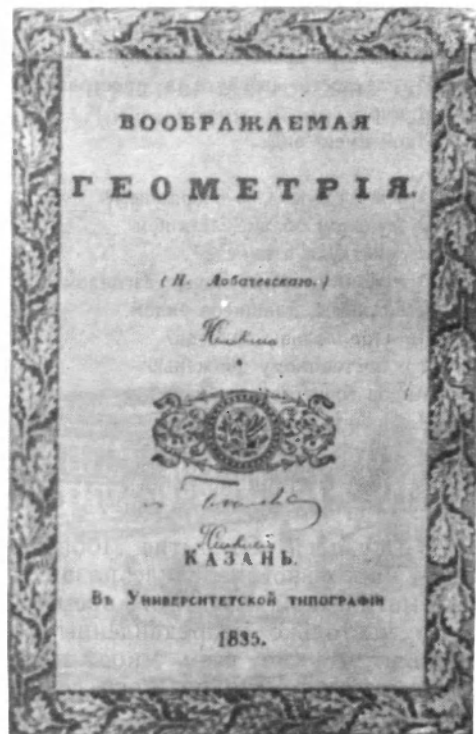


Рис. 41



Титульный лист «Геометрии» Лобачевского

В евклидовом пространстве  $\delta=0$  (так как  $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ ), поэтому его кривизна считается равной нулю.

Получается так, что наша «употребительная» геометрия является предельным (при  $\delta\rightarrow 0$ ) случаем геометрии Лобачевского.

1 - й ученик.

В мире все криволинейно.

Прямота лишь сферы часть.

И Евклидово ученье

В космосе... теряет власть.

[2]

Ученик. Послушайте стихотворение поэта Александра Лихолета (Донецк), напечатанное в альманахе «Истоки» (М.: Молодая гвардия, 1983).

#### Лобачевский

«Все! Перечеркнуты «Начала».

Довольно мысль на них сучала,

Хоть прав почти во всем Евклид,

Но быть не вечно постоянству:

И плоскость свернута в пространство,

И мир

Иной имеет вид...

О чем он думал во вчерашнем?

О звездном облаке, летящем

Из ниоткуда в никуда?

О том, что станет новым взглядом:

Две трассы, длящиеся рядом,

Не параллельны никогда?

Что постоянному движенью

Миров сопутствует сближенье,

И, значит, встретятся они:

Его земная с неземными

Непараллельными прямыми

Когда-нибудь, не в наши дни?..

Ведущий. Открытие Лобачевского настолько опередило развитие математической мысли того времени, было настолько непредвиденным и смелым, что во всем мире почти никто из математиков — его современников — не был готов к восприятию идей «воображаемой геометрии». Поэтому при жизни Лобачев-

ский попал в тяжелое положение «непризнанного ученого». Приведу один любопытный факт общественной жизни того времени.

Могучий «властитель дум» передовой интеллигенции — Н. Г. Чернышевский. Казалось, он-то мог, хотя бы интуитивно, ощутить в утверждениях геометрии Лобачевского идею революционного переосмысливания веками укоренившейся системы восприятия пространства. Увы, так не случилось. Иначе Чернышевский не иронизировал бы в письме к сыновьям: «Что такое «кривизна луча» или «кривое пространство»? Что такое геометрия без аксиомы параллельных?» Он сравнивает это с «возведением сапог в квадраты» и «извлечением корней из голенищ» и говорит, что это столь же нелепо, как «писать по-русски без глаголов». (А ведь Фет писал без глаголов и получалось здорово:

«Шелест, робкое дыханье, трели соловья».)

1 - й ученик.

Отшатнулись коллеги. отстали

друзья...

Может, в партии жизни зевнул

ты ферзя?

2 - й ученик.

— Чушь, — кричат, — Лобачевский, —

нелепица, бред.

Ничего смешотворней и в мире-то нет!

Параллели не встретятся — это же

просто,

Как дорога от города и до погоста!

Ну хоть рельсы возьми, пересечешься

им что-ли,

Хоть сто лет рассекая раздольное

поле?

3 - й ученик.

Где ж понять им: коль к звездам

протянутся рельсы,

Окунутся с разбега в иные законы.

Там, где в нуль обращается зябнувший

Цельсий,

Мировые законы пока потаенны.



4-й ученик.

Проплывают в ухмылке ученые лица,  
И насмешек у сердца стоит ледостав.  
Так неужто же он, Лобачевский,

смирится?

Нет, он целому миру докажет,

что прав!

[3]

Ведущий. Потребовалось полвека для того, чтобы идеи Лобачевского сделались неотъемлемой частью математических наук, проникли в механику, физику, космологию, стали общекультурным достоянием. Так, в «Братьях Карамазовых» Иван, обладающий, по словам автора романа, «евклидовским» характером ума, говорит: «Пусть даже параллельные линии сойдутся, и я сам это увижу; увижу и скажу, что сошлись, а все-таки не приму...» Это значит, что Достоевский имел отчетливое представление о новой геометрии.

В 1827 году Лобачевского изби-

рают ректором Казанского университета. Эти обязанности он исполнял весьма энергично и плодотворно почти 20 лет. В бытность его ректором студентами Казанского университета были Л. Н. Толстой и И. Н. Ульянов — отец В. И. Ульянова-Ленина.

Учащиеся (сцена в лицах).

— Хочу держать испытание. Прошу

бумаги принять.

— Так, что там у вас? Прощенье...

Свидетельство о рождении...

Дворянское происхождение... —

Ну, это не суть и важно:

к учебе талант главней.

Граф... Тульский... Глядит отважно.

Кустятся крылья бровей.

Отклонялся юноша. Долго глядит

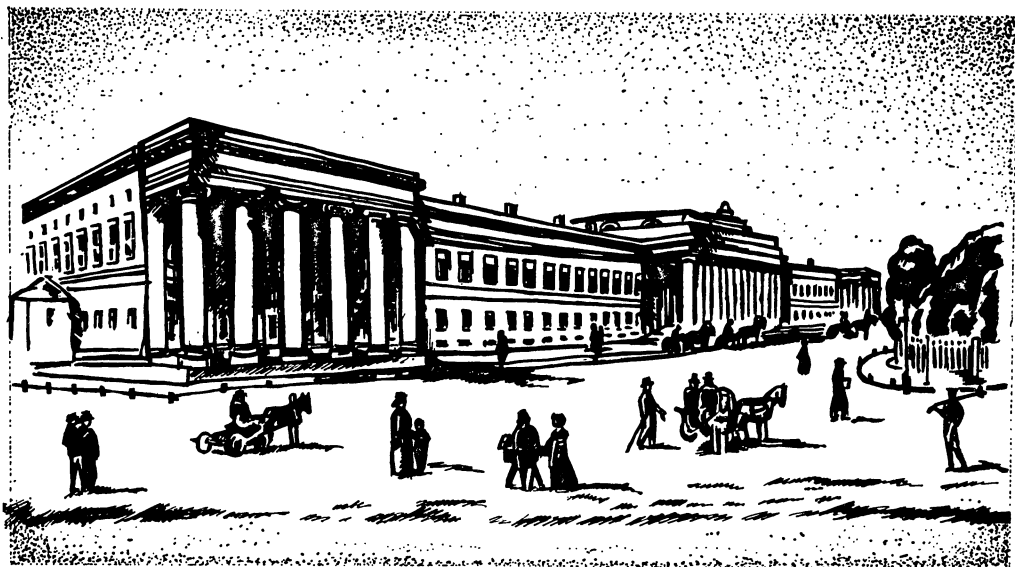
Лобачевский вслед.

...Зачислит навек Толстого

России университет!

[3]

Ведущий. Много было совершенно Лобачевским ночных визитов



Казанский университет в 30-х годах XIX века



Дочь Лобачевского Варя

на башню в университетскую обсерваторию для наблюдений, вычислений и размышлений.

Учащиеся.

Ректор дворцу толкнул, сбивши  
с валенок снег.

У прибора застыл молодой человек.

Лобачевский студента, конечно, узнал,  
Высший ставил недаром вступительный  
балл!

— Здравствуй, друг! Почему же ты  
ночью не спишь? —

Ректор юношу тихо спросил. —

Чем тут занят на башне в  
рассветную тишь?

Да тужурку надень — ведь застыл.

— Наблюдаю за небом и запись веду...

— Молодчина, Ульянов. Привычен  
к труду... —

Тьму сменяла еще не окрепшая рань.  
Перед утром вокруг отсырело.

— А откуда, дружище, приехал  
в Казань?

— Астраханцы мы.

— Славное дело!.. —

И ведут они долгий ночной разговор,  
О, как бережно внемлет ему тишина!  
И на них сквозь окошко взирает

в упор,

Разорвав облака, молодая луна.

Худ Илья, слегка скуласт, тонок,

словно вектор.

Но к наукам он горазд — это чувствует

ректор.

Зачисляет в Россию таких он людей,

Что как воздух отчизне нужны.

Зачисляет в Россию лавину идей

И грядущую славу страны.

[3]

Ведущий. Добавлю к сказанному, что в конце XIX века и Владимир Ильич Ульянов становится студентом Казанского университета. Вернемся, однако, в 1830 год. Лобачевский еще только третий год был ректором Казанского университета, а на Казань и Поволжье обрушилась беда — эпидемия холеры. Энергичными, самоотверженными действиями ректора Лобачевского удалось предотвратить проникновение холеры на университетскую территорию. И хотя в городе холера выкосила чуть ли не половину населения, среди студентов и служащих университета заболевших было совсем немного.

Ученик.

Умирая бесцельно, тень скользит  
по песку —

Здесь холера прицельно бьет живых  
на скаку.

Гостя бродит кругом, пышет черною  
злойбой.

Все Поволжье — вверх дном. Вырвись,  
смертник, попробуй!

Ненаучному шуму удивляйся, Евклид!  
Тяжко думая думу, город ночью

не спит.

Бродит смерть по дороге,  
Пляшет смерть на пороге,  
На приволжском песке...  
Губернатор в тревоге, губернатор

в тоске.

— Лобачевский, спаси! Лобачевский,  
не выдай!

Что желаешь проси: не убудешь  
с обидой.

Ты умен ведь, как черт в каждом  
стоящем деле,

Неподкупен и тверд — все ж вокруг  
очумели...

Лобачевский горяч, гонит гибели  
горечь.

И без отдыха врач — грустный Фукс  
Карл Федорыч.

Смерть играет отбой.  
Долгий выигран бой.

[3]

Ведущий. Подошло время (1846 год), когда Лобачевскому по формальным причинам пришлось уволиться с должностей «профессора чистой математики» и ректора университета, с которым была связана вся его жизнь и который обязан ему своим развитием. Взамен Лобачевский получил другую должность, существенно менее оплачиваемую.

Значительно ухудшившееся материальное положение, а затем и большое горе, постигшее Лобачевского в 1852 году (от туберкулеза скончался его любимый старший сын Алексей, студент университета), заметно подорвали здоровье Николая Ивановича.

Но несмотря на болезнь и начавшую прогрессивно развиваться слепоту, он приходил в университет на экзамены, принимал участие в научных диспутах при защитах диссертаций.

В 1855 году Лобачевский закончил свой последний труд — «Пангеометрию», посвятив эту работу 50-летию университета. В сентябре того



Памятник Лобачевскому в Казани

же года Николай Иванович обратился к министру с просьбой предоставить ему годичный отпуск и денежную помощь для серьезного лечения. Министр же в своем докладе царю Александру II предложил уволить Лобачевского «как бесполезного» и получил на это согласие царя.

Ученик.

### Сумерки гения

Где-то Волга блеснит, зеленеют луга,  
Разнотравьем шелковым манят берега.  
Здесь же мраком налит кабинет

до краев.

Приговор катаракты бесстрастно суров.  
Темнота подступает волной,  
Нависает зловещей стеной.

Мир окрестный, геометр, ты больше  
не видишь.

О, как тьму бессердечную  
ты ненавидишь!



Ученик.

Ужели и твоих иссякнет волн  
  стремление —  
И Волга зарастет болотною травой?  
И где суда твои крылатые скользили,  
Увязнет странника усталая нога?  
Уда оны с собой веселые привозили —  
Осиротевшие умолкнут берега!..

Проф. В. Ф. Каган

## 59

словно бы предощущая в этом постулате тот риф, о который впоследствии (через 2000 лет) разобьется казавшийся безупречно прочным корабль евклидовой геометрии. Тем более что, как это обнаружили современные нам историки, в трудах Аристотеля и других предшественников Евклида уже содержались «следы размышлений о построении такой геометрии, которую мы теперь назвали бы неевклидовой».

Явное нежелание, с которым Евклид ввел пятый постулат, побуждало его самого к обдумыванию возможности «неевклидовой геометрии», но требующихся для этого революционных изменений в его взглядах на геометрию не произошло.

**Н. И. Лобачевский.** Датой завершившейся постройки «корабля неевклидовой геометрии» считается 24 февраля 1826 года, когда с кафедры Казанского университета впервые были провозглашены Н. И. Лобачевским его новые идеи и окончательно сложившийся взгляд на основания геометрии. Публикация состоялась в 1829—1830 годах.

**Янош Бойяи.** Случилось так, что почти одновременно с Лобачевским, но ничего не зная о его работах, такой же «корабль» построил молодой венгерский офицер и математик Янош Бойяи (1802—1860). Еще в 1829 году он писал отцу: «Я совершил столь чудесные открытия, что не могу прийти в себя от восторга. Из ничего я построил новый, иной мир». К 1825 году Бойяи окончательно убедился в непротиворечивости новой геометрии (он назвал ее  $S$ -геометрией, а евклидову —  $\Sigma$ -геометрией). Однако обнародовать свою работу («Аппендикс») по «неевклидовой геометрии» Бойяи удалось лишь в 1832 году, т. е. немного позже появления первой публикации Лобачевского.

**К. Ф. Гаусс.** Основной виновник этой задержки, как ни парадоксально, — общепризнанный «король математиков» Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), на похвалу которого так надеялся Янош Бойяи, посылая ему свою работу. Вместо похвалы последовал весьма сдержанный отзыв.

— Похвалив юного Бойяи, — объяснил Гаусс, — я похвалил бы самого себя, поскольку я еще раньше открыл независимость пятого постулата Евклида от остальных аксиом.

Для молодого венгерского математика, жаждущего признания и славы, также было большим ударом узнать от Гаусса, что почти одновременно с ним, но независимо от Гаусса неевклидову геометрию разработал русский математик Н. И. Лобачевский.

Теперь точно установлено, что Гаусс на самом деле раньше Бойяи и Лобачевского — примерно на 10—12 лет — открыл возможность существования непротиворечивой неевклидовой геометрии, но, опасаясь критики со стороны невежд и полуневежд, при жизни воздерживался от публикации своих исследований по неевклидовой геометрии.

И все же ни Гаусс, ни Бойяи не построили «корабль неевклидовой геометрии» с такой обстоятельностью, как это сделал Н. И. Лобачевский.

### Истина, свободная от аксиомы о параллельных

Теорему о том, что в любом треугольнике  $ABC$  сумма углов

$$A + B + C = 2d \quad (d = 90^\circ),$$

невозможно доказать, не опираясь на пятый постулат Евклида. Но вот небольшой нюанс в условии и... пути постулата падают: чтобы доказать, что



сумма углов треугольника не может быть больше  $2d$

не нужны ни евклидов постулат, ни аксиома Лобачевского о параллельных прямых. Именно так, без ссылок на теорию параллельных линий, и доказывал эту теорему Лобачевский в своей работе.

**Доказательство.** Пусть в треугольнике  $ABC$  (рис. 42)  $\angle A$  наименьший. Предположим противное тому, что доказываем, т. е. что  $A+B+C > 2d$ , например, на величину  $\varphi$ :  $A+B+C = 2d + \varphi$ . Построим медиану  $AD$  и продолжим ее за точку  $D$  на расстояние  $DB_1 = AD$ . Соединив  $B_1$  с  $C$ , получим  $\triangle DB_1C = \triangle ADB$ , поэтому равны отмеченные на рисунке углы:  $\angle 1 = \angle 3$ ,  $\angle 2 = \angle 6$ . По предположению

$$\angle 3 + \angle 4 + \angle 6 + \angle 5 = 2d + \varphi.$$

Заменяя  $\angle 3$  и  $\angle 6$  равными им, получим

$$\angle 1 + \angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 2d + \varphi.$$

т. е. в  $\triangle AB_1C$  сумма трех углов такая же, что и в  $\triangle ABC$ .

Кроме этого, в  $\triangle AB_1C$  сумма углов, прилежащих к стороне  $AB_1$ ,  $\angle 1 + \angle 4 = \angle A$ , причем наименьшим углом в  $\triangle AB_1C$  может быть как  $\angle 1$ , так и  $\angle 4$ ; эти углы могут оказаться и равными, если  $B_1C = AC$ , тогда любой из них равен  $\frac{A}{2}$ . В общем же случае в  $\triangle AB_1C$  величина наименьшего угла меньше или равна  $\frac{A}{2}$ . Пусть в  $\triangle AB_1C$  угол  $B_1AC$  наименьший. Проведем из его вершины медиану  $AD_1$  на противоположную сторону (рис. 43) и сделаем такое же построение, как и вначале.

Очевидно, что в полученном новом треугольнике сумма трех углов по-прежнему равна  $2d + \varphi$ , а сумма двух углов с вершинами в конечных

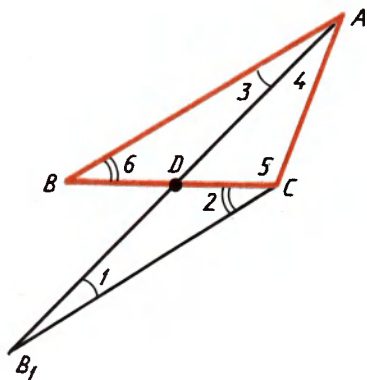


Рис. 42

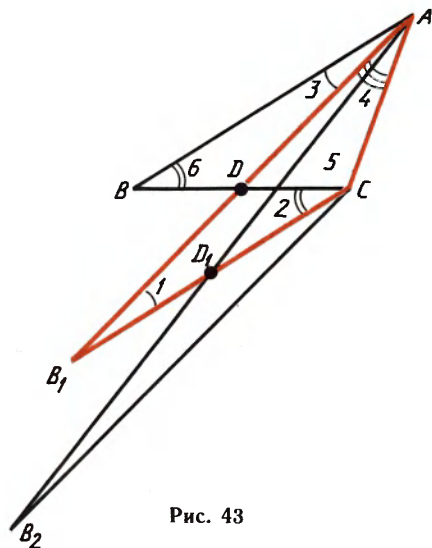


Рис. 43

точках удвоенной медианы меньше или равна  $\frac{A}{2}$ , тогда величина наименьшего угла этого треугольника меньше или равна  $\frac{A}{2^2}$ .

Повторив описанное построение  $n$  раз, мы придем к выводу, что сумма всех углов в  $n$ -м треугольнике также окажется равной  $2d + \varphi$ , а сумма углов, прилежащих к удвоенной медиане предшествующего  $(n-1)$ -го треугольника, меньше или

равна  $\frac{A}{2^{n-1}}$ . Если взять  $n$  достаточно большим, то можно сделать  $\frac{A}{2^{n-1}} < \varphi$ , откуда  $\varphi - \frac{A}{2^{n-1}} > 0$ . В таком случае третий угол  $n$ -го треугольника должен равняться

$$2d + \left( \varphi - \frac{A}{2^{n-1}} \right) > 2d.$$

Последний результат невозможен, следовательно, предположение о том, что сумма углов треугольника  $ABC$  больше  $2d$ , отпадает. Теорема доказана.

### Семь безупречных непривычностей в непривычной геометрии

Любознательных приглашаем совершить мысленное путешествие по воображаемой стране, геометрия которой отличается от евклидовой геометрии только одной аксиомой — аксиомой Лобачевского:

через любую точку  $P$  вне данной прямой  $a$  в плоскости  $\alpha$ , определяемой этой прямой и этой точкой, проходит более чем одна прямая, не пересекающая данную

(вместо постулата Евклида, допускающего существование только одной такой прямой).

Изменена лишь одна аксиома, а

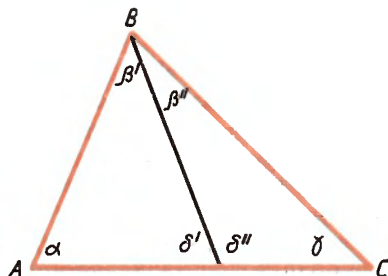


Рис. 44

сколько она породила новых геометрических представлений и теорем, своеобразных в своей непривычности! Называя эту новую геометрию «воображаемой», ее создатель Н. И. Лобачевский обоснованно замечает, что хотя теоремы этой геометрии «противоречат представлению и привычке, но, однако, совершенно безупречны со стороны логической».

Цель нашего краткого путешествия — полюбоваться красотой логики некоторых непривычностей — теорем неевклидовой геометрии Лобачевского.

### Безупречная непривычность 1.

Сумма углов любого треугольника меньше  $2d$  и меняется от треугольника к треугольнику.

**Доказательство.** Сумма углов треугольника не может равняться  $2d$ , так как отсюда следовал бы постулат Евклида о параллельных, неприемлемый в геометрии Лобачевского. Но доказано (см. с. 61), что эта сумма не может быть и больше  $2d$ .

Следовательно, сумма углов треугольника меньше  $2d$ .

Теперь докажем вторую часть утверждения теоремы, что сумма углов треугольника не может оставаться одинаковой для всех треугольников. Предположим противное: сумма  $S$  углов треугольника одна и та же для всех треугольников. Тогда (рис. 44)

$$\alpha + \beta' + \beta'' + \gamma = S, \quad (1)$$

$$\alpha + \beta' + \delta' = S, \quad (2)$$

$$\gamma + \beta'' + \delta'' = S, \quad (3)$$

$$\delta' + \delta'' = 2d. \quad (4)$$

Складывая (2) и (3), получаем:

$$\alpha + \beta' + \delta' + \gamma + \beta'' + \delta'' = 2S,$$

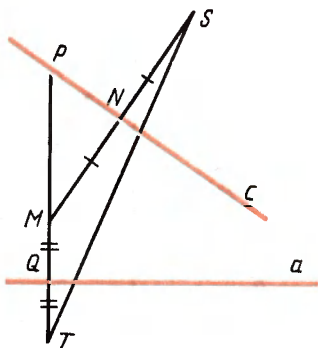


Рис. 45

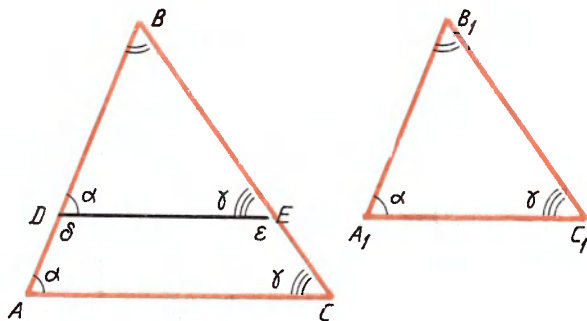


Рис. 46

или

$$\underbrace{(\alpha + \beta' + \beta'' + \gamma)}_S + \underbrace{(\delta' + \delta'')}_2d = 2S,$$

или

$$S + 2d = 2S,$$

откуда  $S = 2d$ . Таким образом, при условии постоянства суммы углов всех треугольников сумма углов треугольника  $ABC$  оказывается равной  $2d$ , а отсюда следует постулат Евклида, неприемлемый в геометрии Лобачевского. Теорема доказана полностью.

## Безупречная непривычность 2.

Среди фигур с четырьмя углами совсем нет прямоугольников, так как сумма углов всякого выпуклого четырехугольника меньше  $4d$ .

Докажите самостоятельно! На размышление — не более 1 минуты!

## Безупречная непривычность 3.

Не около всякого треугольника можно описать окружность

**Доказательство.** Пусть  $a$  — какая-либо прямая (рис. 45),  $P$  — произвольная точка вне этой прямой,  $c$  — прямая, проходящая через  $P$  и параллельная прямой  $a$ . Пусть  $PQ \perp a$  и  $M$  — произвольная точка, принадлежащая отрезку  $PQ$ . Построим  $MN \perp c$  и продолжим его на отрезок  $NS = MN$ . Перпендикуляр  $PQ$  продолжим на отрезок  $QT = MQ$ . Рассмотрим  $\triangle MST$ . Если бы около этого треугольника можно было описать окружность, то ее центр был бы точкой пересечения  $a$  и  $c$ , но такой точки нет, так как  $a$  и  $c$  не пересекаются. Следовательно, около треугольника  $MST$  невозможно описать окружность.

## Безупречная непривычность 4.

Подобных треугольников не существует.

**Доказательство.** Предположим, что существуют два неравных треугольника с попарно равными углами:  $A = A_1$ ,  $B = B_1$ ,  $C = C_1$  и  $AB > A_1B_1$  (рис. 46). На  $AB$  отложим  $BD = A_1B_1$  и через  $D$  проведем прямую  $DE$  так, чтобы  $\angle BDE = \angle B_1A_1C_1$ . Получились равные соответственные углы:  $\angle A = \angle BDE$ ,

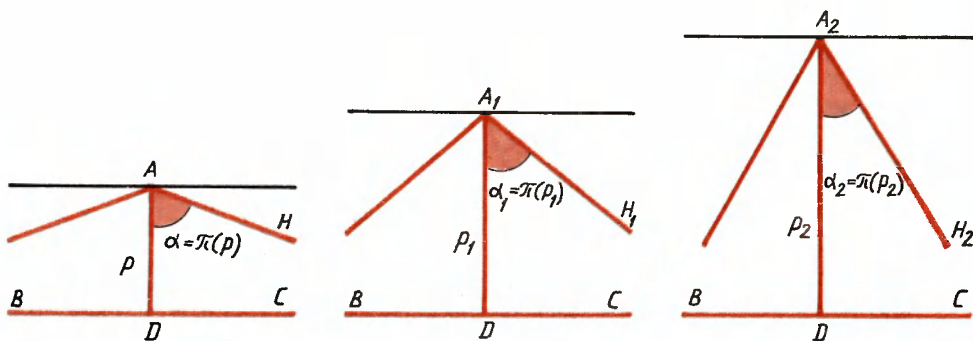


Рис. 47

образовавшиеся при пересечении  $AC$  и  $DE$  прямой  $AD$ , а это значит, что прямая  $DE$  не пересекается с прямой  $AC$  (защитайте это утверждение!), но пересекается с  $BC$  в какой-то точке  $E$ . Так как  $\triangle BDE = \triangle A_1B_1C$ , то  $\angle BED = \angle B_1C_1A_1$  и  $\alpha + \delta = 2d$ ,  $\gamma + \varepsilon = 2d$ . Тогда в четырехугольнике  $ADEC$  сумма углов равна  $4d$ , в то время как в геометрии Лобачевского эта сумма должна быть меньше  $4d$  (см. непривычность 2).

Значит, не могут существовать и два неравных треугольника с попарно равными углами. Следовательно, не существуют и подобные треугольники.

#### Безупречная непривычность 5.

Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Докажите самостоятельно! На размышление — не более 1 минуты!

**Замечание.** Получается так, что к трем известным признакам равенства треугольников в геометрии Лобачевского прибавляется еще и четвертый признак.

#### Безупречная непривычность 6.

Вспомним сначала, что угол  $DAH$  (рис. 47) между  $AH \parallel BC$  и отрезком  $AD \perp BC$  Лобачевский назвал углом параллельности и обозначил  $\pi(p)$ , где  $p$  — длина перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на прямую  $BC$ .

Теперь докажем, что

$\pi(p)$  является монотонно убывающей функцией  $p$ , принимающей все значения от  $90^\circ$  до  $0^\circ$ .

Это значит, что если  $p$  постепенно увеличивать от 0 до  $\infty$ , то угол параллельности  $\pi(p)$  постепенно убывает, неограниченно приближаясь к нулю при  $p \rightarrow \infty$  (см. рис. 47).

**Доказательство.** Пусть  $AH \parallel BC$ ,  $AD \perp BC$ ,  $AD = p$  и  $\alpha = \pi(p)$  (рис. 48). Уменьшим значение аргумента  $p$ , взяв  $AE < AD$ . Проведем  $EE_1 \perp AD$ ,  $EE_1$  пересечет  $AH$ . В самом деле, проведя  $DK \parallel EE_1$ , мы можем утверждать, что  $DK$  пересечет  $AH$  и получится  $\triangle AKD$ .  $EE_1$ , будучи параллельной  $DK$ , не может ее пересечь, следовательно,  $EE_1$  должна пересечь сторону  $AK$  треугольника  $ADK$ . Значит, чтобы получить прямую  $AM$ , параллель-

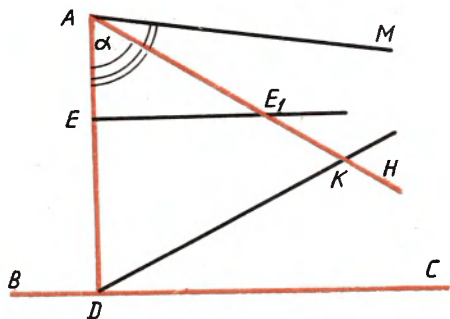


Рис. 48

ную  $EE_1$ , мы должны увеличить угол  $\alpha$ . Таким образом,

$$\pi(AD) < \pi(AE).$$

Теорема доказана.

### Безупречная непривычность 7.

Чем дальше продолжают параллельные линии в сторону параллельности, тем больше они сближаются.

**Доказательство.** Пусть  $AH \parallel DB$  (рис. 49). На  $AH$  в сторону параллельности от  $A$  возьмем точку  $E$  и построим  $EF \perp DB$ . Так как  $\angle HEF + \angle AEF = 2d$ , а  $\angle DAE + \angle AEF < 2d$  (сумма углов четырехугольника меньше  $4d$ ), то  $\angle HEF > \angle HAD$ ,  $\alpha_1 > \alpha$ , т. е.  $\pi(EF) > \pi(AD)$ . Отсюда, зная, что  $\pi(p)$  — функция убывающая, заключаем:  $EF < AD$ .

### «Дефект» треугольника и случай его исчезновения

Лобачевский получил очень интересное соотношение между функцией  $\pi(p)$  и показательной функцией аргумента  $p$ , а именно:

$$\pi(p) = 2 \operatorname{arctg} e^{\frac{-p}{\sqrt{k}}} \quad (\text{радиан}),$$

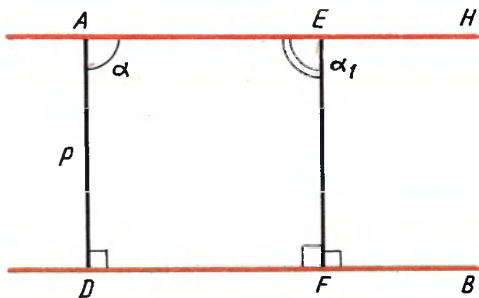


Рис. 49

где  $e = 2,71828\dots$ ,  $k$  — некоторая константа, которая, в свою очередь, равна отношению площади ( $S$ ) некоторого треугольника  $ABC$  к его «дефекту» ( $D$ ), т. е.

$$k = S:D, \text{ где } D = \pi - (A + B + C).$$

Связь между значениями  $k$  и  $D$  такова, что всякое увеличение  $k$  влечет уменьшение  $D$  и при  $k \rightarrow \infty$ ,

$$D \rightarrow 0, \quad e^{\frac{-p}{\sqrt{k}}} \rightarrow 1, \quad \text{а потому}$$

$$\pi(p) \rightarrow 2 \operatorname{arctg} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Эти результаты возвращают нас к евклидовой геометрии и позволяют сделать замечательный вывод: геометрию Евклида можно рассматривать как предельный случай геометрии Лобачевского, и еще:

если  $k$  велико и размеры фигур, с которыми имеем дело, достаточно малы, то результаты, получаемые по формулам геометрии Лобачевского, практически не будут отличаться от результатов, полученных по формулам евклидовой геометрии, но в последнем случае вычисления окажутся менее громоздкими.

### А не теорема ли этот пятый постулат?

Даже самые пытливые умы человечества очень долго не могли осо-

знать неразрешимость двух знаменитых задач:

изобрести вечный двигатель и доказать аксиому параллельности (пятый постулат).

И все же... решимся на дерзкую попытку вывести этот «вечный пятый» из ранга аксиом и доказать как теорему!

Воспользуемся формулировкой постулата, предложенной шотландским физиком и математиком Плейфером:

через точку, лежащую вне прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной.

Вдумайтесь теперь в следующие наши «доказательные рассуждения»: построим прямую  $AB$  (рис. 50), берем вне ее точку  $M$  и проводим  $MC \perp AB$ , а затем прямую  $MN$ , перпендикулярную  $MC$ ; тогда  $MN$  и будет прямой, параллельной  $AB$ , в силу известной теоремы:

две прямые, порознь перпендикулярные третьей прямой, лежащие с ней в одной плоскости, параллельны.

(Ссылаться на эту теорему можно, так как она доказывается без аксиомы параллельности.) Но через точку  $M$  можно провести единственный перпендикуляр к  $AB$ , и к прямой  $MC$  из лежащей на ней точки  $M$  также можно провести лишь един-

ственный перпендикуляр, значит,  $MN$  — единственная прямая, проходящая через точку  $M$ , параллельная прямой  $AB$ . Состоялось ли доказательство?

Конечно, это только для дошколят нет парадокса в том, что

Мне купили синий, синий,  
Презеленый, красный шар.

Что же касается вас, кому свойственно более критическое отношение к высказываемым доводам, то неудивительно, если возникло законное сомнение в полноценности предложенного «доказательства». Действительно, это же всего лишь геометрический софизм!

Но где же в наших рассуждениях изъян?

Совет таков: выскажите прежде свои соображения по этому вопросу и только затем сверьте их с последующим нашим «разоблачением» этого софизма.

Разоблачение софизма. Суть в том, что примененный прием построения прямой, параллельной данной, не единственный. Возможно другим способом построить прямую, проходящую через точку  $M$ , параллельную прямой  $AB$ , и нет никакой гарантии, что новая прямая  $MN_1$  совпадает с прямой  $MN$ .

### Удивительно, но факт

Пусть дана сфера  $(O; r)$  и пусть точка  $P$  — центр второй сферы, радиус которой

$$R = PO.$$

При любом расположении точки  $P$  — центра второй сферы, если только

$$PO > \frac{r}{2},$$

вторая сфера пересекает первую (рис. 51). Причем

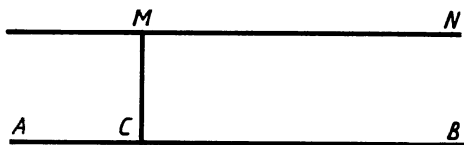


Рис. 50



площадь поверхности той части второй сферы, которая находится внутри первой сферы, совершенно не зависит от размеров радиуса  $PO$  второй сферы и будет всегда составлять  $\frac{1}{4}$  часть площади поверхности всей первой сферы.

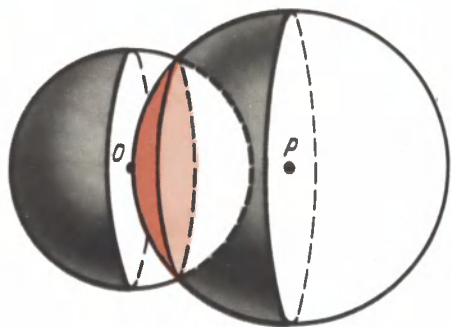


Рис. 51

Докажите справедливость высказанного утверждения.

(Этот удивительный факт используется и при решении некоторых задач в неевклидовых геометриях.)

Указание. Используйте формулу площади поверхности шарового сегмента (рис. 52):  $S_{\text{сегм}} = 2\pi R h$ , где  $R$  — радиус шара,  $h$  — высота сегмента.

Доказательство. В сечении сфер  $(O; r)$  и  $(P; R)$ ,  $R = PO$  (рис. 53), получаются окружности, которые в свою очередь пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Пусть  $C$  — точка пересечения хорды  $AB$  и диаметра  $OD$ , тогда  $OC = h$  — высота шарового сегмента  $(AOB)$ . Площадь поверхности этого сегмента

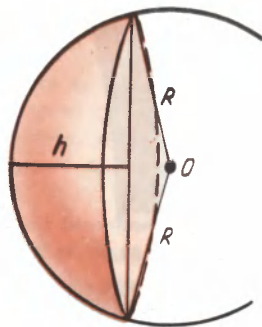


Рис. 52

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi R h = \pi \cdot 2OP \cdot OC = \\ = \pi \cdot OD \cdot OC.$$

Но в прямоугольном треугольнике  $OAC$   $OA^2 = OC \cdot OD$ , и так как  $OA = r$ , то  $S_{\text{сегм}} = \pi r^2$ , что составляет ровно  $\frac{1}{4}$  часть площади поверхности сферы радиуса  $r$ .

Таким образом, действительно площадь поверхности той части сферы  $(P; R)$ ,  $R = PQ$ , которая расположена внутри сферы  $(O; r)$ , не зависит от расположения центра  $P$  второй сферы, лишь бы было  $PQ > \frac{r}{2}$ ; так как в случае  $PQ < \frac{r}{2}$  рассматриваемые сферы не имели бы общих точек.

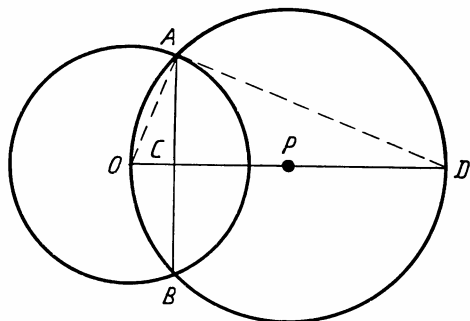


Рис. 53

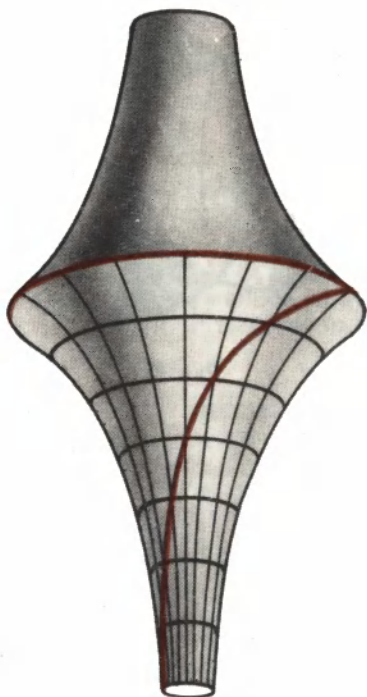


Рис. 54

### Существует ли «страна» с аксиомой Лобачевского?

Да! И даже не одна! Название одной из них — «псевдосфера», и открыл ее итальянский математик

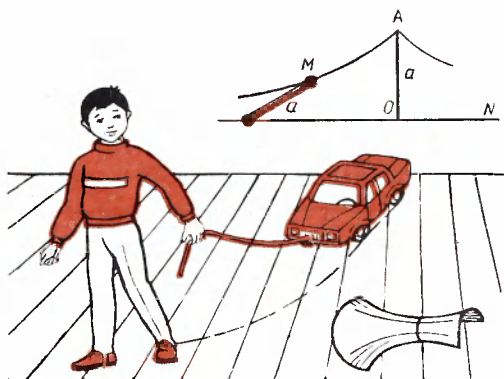


Рис. 55

Бельтрами в 1868 году, т. е. уже спустя 12 лет после смерти Н. И. Лобачевского.

Псевдосфера — это вогнутая бесконечная поверхность (рис. 54), образованная вращением трактрисы вокруг ее асимптоты — прямой  $LN$  (рис. 55). Трактрисой назвали плоскую кривую, в любой точке которой постоянно длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с «направляющей» прямой — асимптотой трактрисы. На рисунке отрезок касательной  $ML = a$  и  $LN$  — асимптота. Трактриса симметрична прямой  $OA \perp LN$ . Точку  $A$  называют вершиной трактрисы, это ее наиболее удаленная от асимптоты точка ( $OA = a$ ).

Из описания трактрисы следует, что часть ее дуги можно получить, например, как траекторию тележки, которую тянет за веревочку малыш, идущий вдоль направляющей, если в начале движения тележка находилась вне направляющей прямой (см. рис. 55).

Псевдосфера имеет ряд интересных геометрических свойств. Например, она бесконечна и все же имеет конечную площадь, равную  $4\pi a^2$  (как сфера радиуса  $a$ ). Но самое важное то, что в геометрии Лобачевского эта поверхность играет такую же роль, как и плоскость в геометрии Евклида. При этом отрезком, соединяющим любые две точки псевдосферы, считается та дуга на поверхности, длина которой определяет кратчайшее расстояние между этими точками, т. е. дуга так называемой «геодезической» линии на данной поверхности (аналог отрезка прямой на плоскости). Тогда оказывается, что на псевдосфере выполняются почти все положения геометрии Лобачевского, в том числе аксиома параллельности, теорема о

сумме углов треугольника (меньше  $2d$ ) и многие другие.

Вслед за псевдосферой Бельтрами не замедлили появиться и другие модели плоскости Лобачевского — круг Ф. Клейна, круг А. Пуанкаре. Так, в модели Ф. Клейна, состоящей только из внутренних точек круга (рис. 56), «прямой линией» считается любая хорда, но без своих концов. На рисунке видно, что у геометрических обитателей «страны Клейна» через любые две точки  $A$ ,  $B$  проходит единственная «прямая» и что через точку  $A$ , не принадлежащую «прямой» ( $a$ ), проходит бесконечно много «прямых», не пересекающих ( $a$ ).

Этими и другими моделями «плоскости Лобачевского» была полностью установлена непротиворечивость его геометрии. В XX веке была установлена и непосредственная связь геометрии Лобачевского с реальными физическими закономерностями. Например, в расчетах современных синхрофазотронов используются формулы геометрии Лобачевского.

И все же... Огромному множеству успехов в земных делах человечество обязано безупречным закономерностям евклидовой геометрии.

Свое стихотворение Дмитрий Чельшев так и озаглавил:

#### Геометрия удач

У каждого из нас своя ПРЯМАЯ,  
Им пересечься только раз дано.  
И в их пересеченьи мы встречаем  
Свою беду, судьбу, удачу, но...

У каждого из нас своя ОКРУЖНОСТЬ,  
Непроходящий круг проблем, забот,  
Потерянность, утраченность,  
ненужность  
И новый к потепленью ПОВОРОТ.

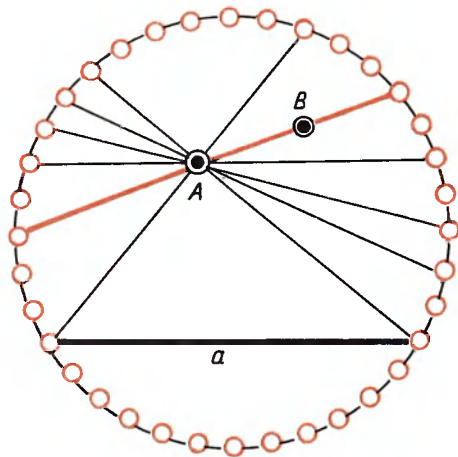


Рис. 56

У каждого из нас свой ТРЕУГОЛЬНИК.  
И, убегая от страстей своих,  
Мы мечемся, настигнутые болью  
И счастьем, поделенным на троих.

А как нас век кидает и ломает!  
Но на губах так мало добрых слов.  
У каждого из нас своя КРИВАЯ  
И ломаная с множеством УГЛОВ.

Удач вам в поисках красивых  
решений десятка увлекательных задач!

**Задача 1.** Сколько равных сторон у треугольника, стороны которого  $a$ ,  $b$ ,  $c$  связаны соотношением

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = 0?$$

Три? Две? Нуль?

**Задача 2.** (*Превращение квадрата в пирамиду.*) Изготовьте модель треугольной пирамиды из квадратной пластинки, делая три прямолинейных сгиба так, чтобы три грани пирамиды оказались прямоугольными треугольниками. Выразите полную поверхность и объем полученной модели пирамиды через длину  $a$  стороны пластинки.

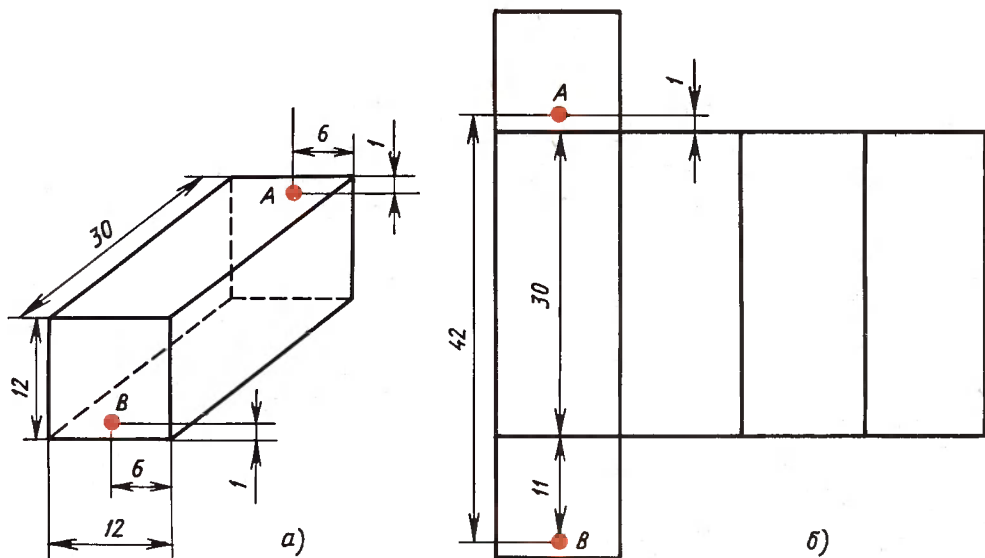


Рис. 57

**Задача 3.** (*Пирамида-«раритет»*.) Много разных пирамид встречалось в задачах. Бывали и такие, у которых две боковые грани перпендикулярны основанию пирамиды, но обычно смежные. А тут читаю: «В четырехугольной пирамиде две противоположные грани перпендикулярны плоскости ее основания...» Так написано в задачнике, значит, возможность такой пирамиды бесспорна. Но как ее представить на рисунке?

**Задача 4.** (*Многогранник отвергает число 7.*) Речь идет о том, что не существует многогранника, имеющего ровно 7 ребер, но возможен такой, у которого количество ребер — любое число  $n > 7$ . Докажите или опровергните это утверждение.

**Задача 5.** (*Успех и заблуждение Брахмагупты.*) Индийский математик и астроном Брахмагупта (VII в. н. э.), мечтая о формуле площади четырехугольника со сторонами  $a, b, c, d$ , аналогичной форму-

ле Герона для треугольника, т. е. о такой:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$p$  — полупериметр, действительно получил ее для четырехугольника, вписанного в окружность. Однако он заблуждался в предположении, что формула верна и для произвольного четырехугольника.

**Задание.** Впишите в окружность какой-нибудь четырехугольник и выведите формулу, выражающую площадь вписанного четырехугольника через его стороны  $a, b, c, d$ .

**Задача 6.** (*Необыкновенно догадливый муравей.*) На внутренней стенке пустой коробки-параллелепипеда в точке A (рис. 57, а) расположился муравей, а на противоположной стенке в точке B прилепилось зернышко. Муравью захотелось быстрее подбежать к зернышку. Математику он, разумеется, не изучал, но, по-видимому, чисто интуитивно нашел кратчайший путь от точки A

к точке *В*. Какой длины был его путь?

Подобные задачи обычно решают с помощью развертки. При этом очень многие делают развертку, как на рисунке 57, б, и отвечают: 42 см. Увы! Это не кратчайший путь! Муравей нашел дорогу длиной 40 см! Кто еще окажется столь же догадливым, как муравей?

**Задача 7.** (*Далеко ли до четвертой вершины?*) Три вершины параллелограмма *ABCD* удалены от одной плоскости на расстояние (в см)

$$AA_1=5, BB_1=19, CC_1=8.$$

А как далеко от той же плоскости до четвертой вершины *D*?

**Задача 8.** (12 «стульев» в окружности.) «Стулья» здесь — это дуги окружности. Начертите окружность и поставьте точку *O* в ее центре. Требуется разделить эту окружность на 12 равных дуг, пользуясь только циркулем.

**Задача 9.** Наглядное, краткое... а значит, и красивое получится у вас решение задачи о движении с постоянной скоростью, если привлечете систему координат «путь — время» и прямую в качестве графика равномерного движения:

По одной дороге в одном направлении находятся в движении пешеход, велосипедист и мотоциклист, каждый с определенной, постоянной скоростью. Когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист был позади на 18 км. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход был позади на 8 км. На каком расстоянии от пешехода был велосипедист в тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода?

**Задача 10.** (*Венецианская шутка с математическим смыслом*, XVI в.) Если четверть двадцати равна четырем, то сколько будет треть от десяти? Решение простое —

арифметическое. Но придумайте геометрическую интерпретацию (изображение) решения этой задачи.

Достаточно одной минуты на размышление для решения каждой из следующих задач:

**Задача 11.** (*Философская загадка Вольтера в свободном переложении.*)

Что самое быстрое, но и самое медленное, самое большое, но и самое маленькое, самое продолжительное и краткое, самое дорогое, но и дешево ценимое нами?

*А в реальной ситуации?*

Что быстрее: проехать весь путь на велосипеде или половину пути на мопеде, который движется вдвое быстрее велосипеда, а другую половину пути — пешком — вдвое медленнее, чем на велосипеде?

Не возникает ли интуитивно предположение: одинаково? Ведь полпути — вдвое медленнее, но еще полпути — вдвое быстрее. Ну, а каков вывод при внимательном рассмотрении? Если, например, привлечь график?

**Задача 12.** (*Ну, заяц, погоди!*) Заяц договорился с волком: оба одновременно выбегут из вершины *A* квадрата *ABCD* и будут бегать, не останавливаясь, с одинаковой постоянной скоростью. Заяц — по сторонам квадрата без изменения выбранного направления, а волк — по диагонали *AC* туда-обратно, не задерживаясь в вершинах *A* и *C*. Волк схватит зайца в тот момент, когда они оба окажутся в одной из вершин квадрата: *A* или *C*.

Заяц математику не изучал и потому лишь интуитивно убежден, что такой момент не наступит никогда. Если вы думаете так же, то объясните это научно и одной фразой.

**Задача 13.** (3 и 4 преобразуются в 4 и 4 — головоломка.) 7 монет расположите на столе в 2 ряда: 4 в одном ряду на одинаковом расстоянии друг от друга и 3 в другом, также на одинаковом расстоянии друг от друга, так, чтобы, передвинув одну монету, не трогая остальных, в каждом ряду оказалось по 4 монеты.

**Задача 14.** (Кто окажется более находчивым?) Запишите каждый в своей тетради:

$$y = 2 \left( 678,4 \cdot \frac{43}{29} + 423 \right) - \\ - (841 + 678,4x) + 22.$$

Переменной  $x$  можете придать произвольное числовое значение и вычислить соответствующее значение  $y$ . Кто быстрее назовет свой результат?

**Задача 15.** (Забавный указатель дорог.) Кажется, это в Австралии, чтобы попасть на территорию одного заповедника, надо пересечь последовательно три небольшие реки, каждую — по мостику. За каждым мостиком имеется развилка дорожек на три направления: налево,

прямо и направо. Всякий раз надо выбирать правильное направление — только одно из трех. Директор заповедника, желая проверить сообразительность туристов, перед первым же мостиком установил дорожный щит с такой надписью: «За первым мостом поверните направо, за вторым — не поворачивайте направо, за третьим — не поворачивайте налево». А ниже приписал: «Два из этих трех указаний ложны».

В каком направлении следует идти туристам, чтобы после каждого мостика с одной попытки дойти до заповедника?

**Задача 16.** (Играют только ладьи.) У меня 4 белых ладьи, у тебя 4 черных. Ладья, поставленная на какое-либо поле шахматной доски, «контролирует» все поля вертикали и горизонтали, которым принадлежит поле, занятое ладьей. Сначала я, а затем ты — поочередно — ставим свою ладью на поле, не «контролируемое» уже стоящей на доске ладьей. Выигрывает тот, кто своим ходом завершит «контролирование» всех полей доски выставленными ладьями. Мы оба стараемся играть наилучшим образом. Кто выигрывает — я или ты?



## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Преобразовав заданное равенство, получим:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=0.$$

Теперь ясно, что равные стороны есть обязательно: или 2, или 3.

2. Линии сгиба показаны на рисунке 58,  $E$  и  $F$  — середины сторон. Очевидно,  $S_{\text{полн}} = a^2$ . Для вычисления объема пирамиды разумно считать ее основанием треугольник  $EAF$ . Тогда высота пирамиды  $a$  и объем

$$V = \frac{a^3}{24}.$$

3. Как видно на рисунке 59, у пирамиды  $ABCD$  противоположные боковые грани  $MAD$  и  $MBC$  перпендикулярны ее основанию.

4. Если все грани — треугольники, то число всех ребер должно быть кратно 3, а 7 не делится на 3. Если же хотя бы у одной грани число вершин больше трех, то число всех ребер  $n > 7$ . У  $n$ -угольной пирамиды всех ребер  $2n$ , т. е. 6, или 8, или 10, ... . Если отсечем уголок от пирамиды (рис. 60), то ребер станет  $2 \cdot n + 3$ , т. е. 9, 11, 13, ... . Значит, действительно возможен многогранник с любым числом ребер  $n > 7$ .

5. Пусть у данной фигуры (рис. 61)  $\angle A = \alpha$  и  $\angle C = 180^\circ - \alpha$ ,  $S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2} ad \sin \alpha$ ,

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} bc \sin (180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (ad + bc) \sin \alpha. \quad (*)$$

По теореме косинусов

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$$

и

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos (180^\circ - \alpha).$$

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha,$$

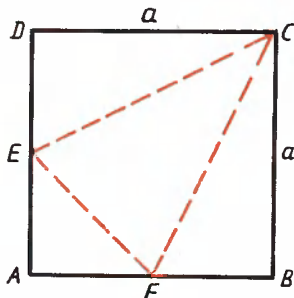


Рис. 58

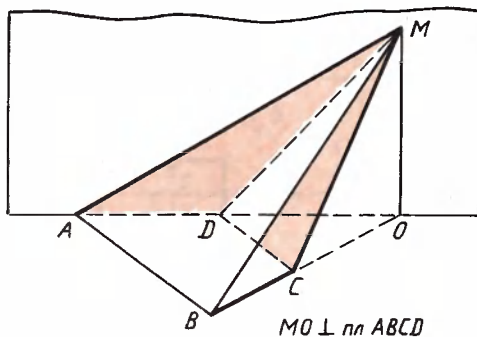


Рис. 59

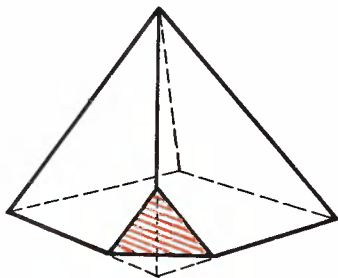


Рис. 60

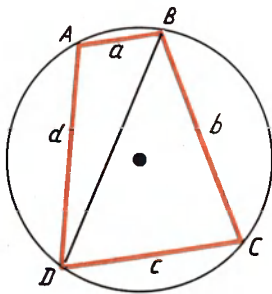


Рис. 61

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)},$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \left( \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}}{2(ad + bc)} = \\ &= \frac{\sqrt{((a+d)^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - (a-d)^2)}}{2(ad + bc)}. \end{aligned}$$

Далее, применяя формулу разложения разности квадратов, мы получим под знаком радикала следующие четыре множителя:

$$(a + d + b - c), (a + d + c - b),$$

$$(b + c + a - d) \text{ и } (b + c + d - a).$$

Заменим их последовательно выражениями:

$$2(p - c), 2(p - b), 2(p - d) \text{ и } 2(p - a),$$

где  $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ . Тогда выражение для  $\sin \alpha$  примет вид:

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc}.$$

Подставляя в (\*), получим:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

6. Возможна развертка, показанная на рисунке 62. Тогда по теореме Пифагора путь муравья

$$AB = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \text{ см.}$$

На коробке его путь — ломаная (рис. 63).

7. Указанную в условии плоскость будем считать координатной:  $xOy$ . Фиксируем одну из заданных вершин, например  $A$ , полагая ее координату  $z_A > 0$ . Учитывая возможные расположения вершин  $B$  и  $C$  относительно

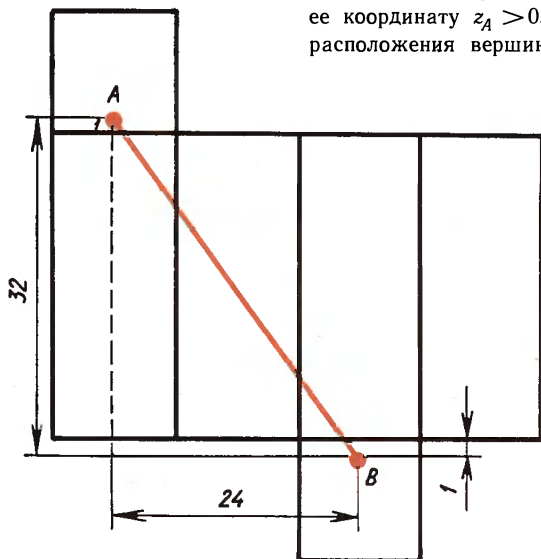


Рис. 62



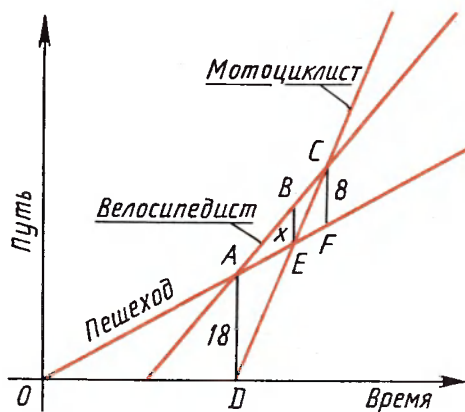


Рис. 66

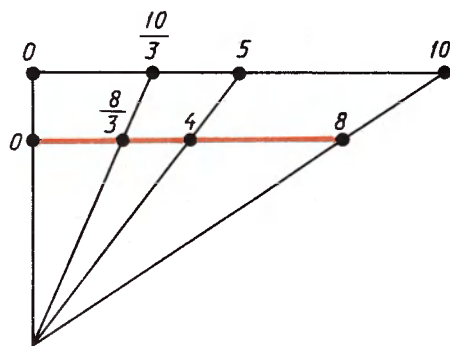


Рис. 67

Сопоставляя равенства (1) и (2), получаем:

$$\frac{18-x}{x} = \frac{9}{4} \text{ или } \frac{18}{x} = \frac{13}{4};$$

$$x = \frac{18 \cdot 4}{13} = \frac{72}{13} \text{ (км).}$$

10.  $\frac{1}{4} \cdot 20$  равно 4, а не 5, очевидно,

за счет изменения единицы масштаба  $(5 \cdot \frac{4}{5}) = 4$ . При новой масштабной единице  $\frac{1}{3} \cdot 10$  равно не  $\frac{10}{3}$ , а  $\frac{10}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{3}$ .

Геометрической интерпретацией решения является, например, рисунок 67.

11. Ответ на загадку Вольтера: время. Не нужны вычисления и для получения ответа на вопрос: «Кто быстрее?» Ведь за время, пока идешь пешком половину пути, на велосипеде проедешь весь путь, так как скорость едущего на велосипеде вдвое больше (см. примерные графики движения на рисунке 68). А для преодоления другой половины пути на мопеде еще потребуется некоторое количество времени, следовательно, будет быстрее совершить весь путь на велосипеде.

12. Да, желанный для волка момент не наступит никогда, так как диагональ и сторона квадрата несовместимы.

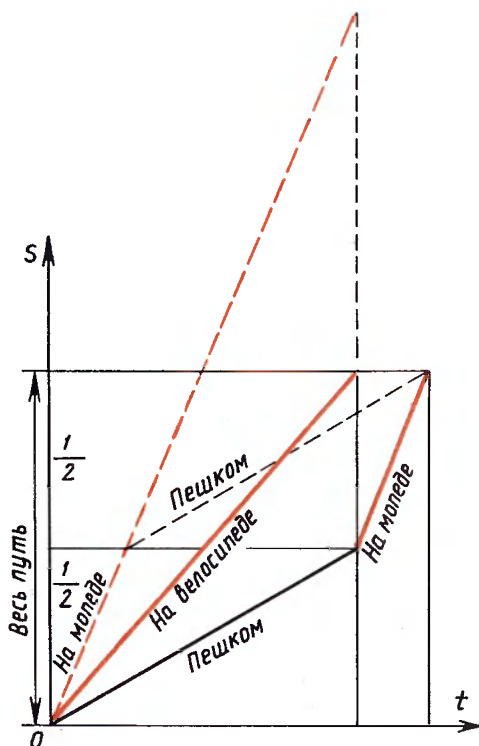


Рис. 68

13. Возможны два варианта первоначального расположения монет в два ряда. На рисунке 69 стрелка указывает перемещаемую монету и ее новое место.

14. Самые находчивые выберут значение  $x = \frac{86}{29}$ . Тогда без выполнения действия с дробями заданное выражение упрощается и останутся легко выполнимые действия:

$$846 - 841 + 22 = 27.$$

15. Рассмотрим все 6 перестановок из трех возможных направлений:

- 1) направо, налево, прямо — все три указания верны,
- 2) направо, прямо, налево — верны 2 сообщения,
- 3) налево, направо, прямо — верно одно сообщение,
- 4) налево, прямо, направо — верны 2 сообщения,

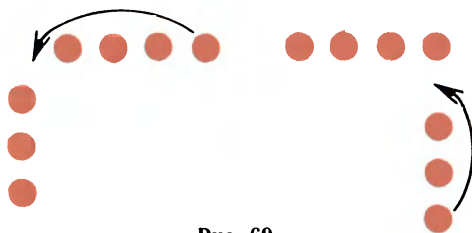


Рис. 69

- 5) прямо, направо, налево — 0 верных сообщений,
- 6) прямо, налево, направо — верны 2 сообщения.

Ответ: из шести вариантов маршрута от первого мостика до заповедника верным является только такой: за первым мостом повернуть налево, за вторым — направо и за третьим — прямо.

16. Можешь всегда выиграть ты, если будешь ставить свои ладьи симметрично моим относительно центра доски.

# ТРАГИЧЕСКАЯ СУДЬБА ЭВАРИСТА ГАЛУА



Эварист Галуа (1811—1832)

## Внезапно проявившееся дарование

26 октября 1811 года в семье директора пансиона Никола-Габриеля Галуа, позже ставшего мэром небольшого городка Франции Бур-ля-Рен, родился сын Эварист. Первоначально мама Эвариста сама заботилась о его образовании, имевшем преимущественно гуманитарное направление. Читая Плутарха, Корнеля, Расина, мальчик жадно впитывает свободолобивые идеи классиков. Когда Эваристу исполнилось 12 лет, родители определили его в Королевский колледж в Париже (ныне лицей Луи-ле-Гран). Хорошо подготовленный, он становится одним из наиболее успевающих воспитанников лицея. За стихи на

латинском языке и переводы с греческого он получает призы и похвальные листы.

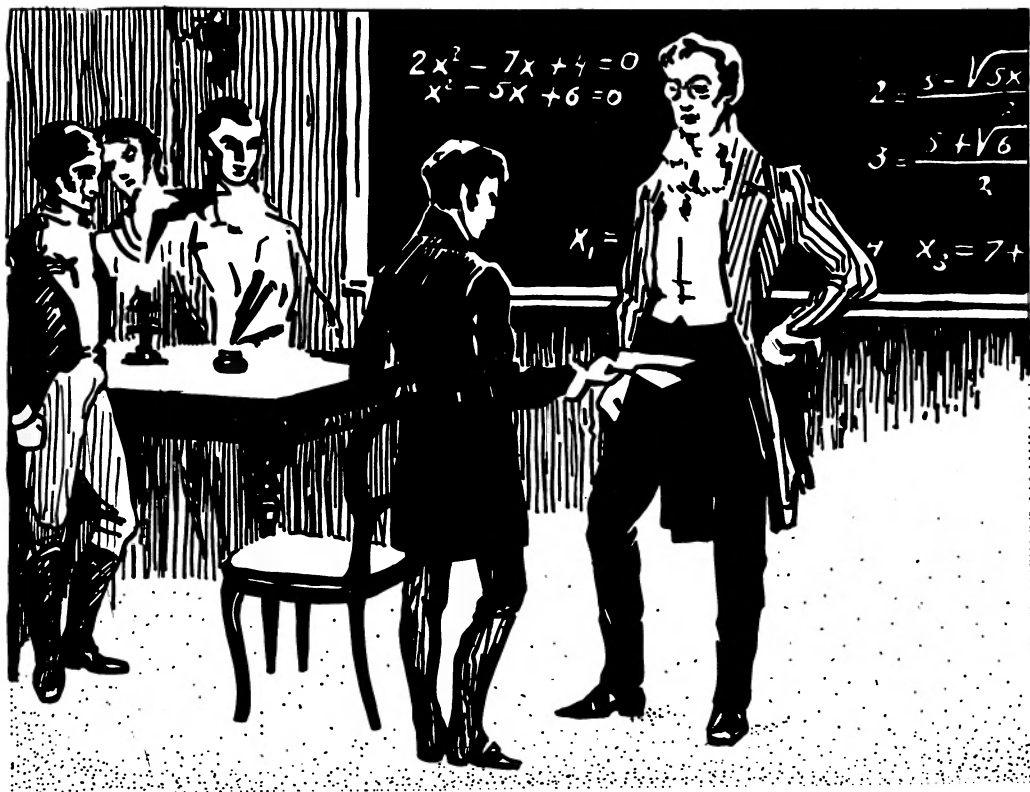
Но довольно скоро литература, история, риторика (наука о красноречии) перестают удовлетворять природный пытливый ум Эвариста. Увлеченность гуманитарными предметами гаснет, поведение его характеризуется учителями как «рассеянное», ум — «недозревшим» и ... Галуа оставляют на второй год в классе риторики.

Сделавшись второгодником, Эварист решает параллельно посещать и математический класс. Там-то сразу же и обнаружились его исключительные математические способности. С интересом и страстью штудирова серьезные учебники и даже исследовательские труды по алгебре и математическому анализу, Эварист особенно увлекся работой Лагранжа — великого французского математика-аналитика XVIII века, в которой исследовалась проблема нерешимости в радикалах алгебраических уравнений общего вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Суть проблемы — выразить решения такого уравнения формулой, составленной из коэффициентов уравнения, знаков арифметических действий и радикалов. Соответствующие формулы для решения уравнений квадратных, третьей и четвертой степеней известны. Последние две были получены еще в XVI веке итальянскими математиками Тарталья и Феррари, но все попытки





получения формулы для решения уравнений пятой степени общего вида

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

были безуспешными в течение более чем двух веков.

Только в 1824 году двадцатидвухлетний норвежский математик Нильс Хенрик Абель, найдя совершенно новый подход к этой проблеме, доказал, что уравнение пятой и более высоких степеней общего вида неразрешимо в радикалах, т. е. невозможно сконструировать из коэффициентов такого уравнения с помощью арифметических действий и извлечения корней формулу, выражающую его решения.

### Цель: раскрыть двухсотлетнюю тайну уравнений

Юный Галуа — он на 9 лет моложе Абеля — избрал иное направление для своих исканий в теории алгебраических уравнений  $n$ -го порядка.

Открытие Абеля и исследования Лагранжа относились к уравнениям с буквенными коэффициентами. Однако же корни некоторых уравнений пятой и более высоких степеней с числовыми коэффициентами удастся выразить в радикалах. Значит, должен быть какой-то признак, позволяющий установить, решается данное уравнение в радикалах или нет.

Полное исследование этого во-

проса и поиск научного ответа стали целью жизни юного Эвариста Галуа. Отныне только сюда направлены все его помыслы. Побокую литературу, риторiku и историю! Уговоры преподавателей не действовали. Юноша твердо и бесповоротно вступил на тропу самостоятельных математических исследований. Ближайшее его стремление — поступить в *Ecole Polytechnique* — Политехническую школу, где математику преподают ученики Лагранжа.

Не будучи натаскан на решении изошренных задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах, Галуа провалился. Этот провал, замечает историк математики Дюпюи, «явился первой из несправедливостей, которые в конце концов отравили ему жизнь». Пришлось вернуться в колледж, но теперь, к счастью, в класс другого учителя математики — Ришара, работающего с огоньком. Учитель Ришар сразу оценил незаурядность натуры и математическое дарование шестнадцатилетнего юноши.

Проходит год, Галуа 17 лет, и вот в одном математическом журнале публикуется его первое научное сообщение: «Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях». Вскоре Галуа сделал новые, еще более значительные открытия, относящиеся к теории решения уравнений, и направил несколько своих научных статей в Академию наук. Оценить его работу и представить совету академии взялся самый знаменитый из французских математиков того времени — Огюстен Луи Коши. Но, как утверждается в статьях и книгах о Галуа, маститый академик якобы умышленно «зажал» его работу, сомневаясь в том, что юный лицеист смог одолеть веками неподдававшуюся проблему, или, быть может, Коши, загруженный делами, просто забыл о

рукописях Галуа. Так или не так, но эти рукописи с тех пор считаются утерянными.

Тень непорядочности или, скажем, высокомерной пренебрежительности, брошенной на Коши летописцами жизни Галуа, удалось значительно осветлить лишь в 1971 году, когда в архивах Французской академии наук было обнаружено письмо Коши, из которого следует, что он внимательно читал все манускрипты Галуа и, убедившись в их важности и ценности, планировал представить его работы совету Академии наук в январе 1830 года. (Правда, почему-то все-таки не представил.)

## Гнев чести

Учитель математики Ришар обратился к дирекции Политехнической школы с рекомендацией зачислить Галуа без вступительных экзаменов как юношу, талантливо работающего, по выражению Ришара, «в высших областях математики». Рекомендацию отклонили, и Эваристу пришлось вновь предстать перед экзаменаторами.

Застенчивый, взволнованный, он выглядит моложе своих семнадцати с половиной лет.

«Расскажите, что Вы знаете о логарифмах», — обратился к нему экзаменатор. И вмиг застенчивость сменилась гордым гневом.

«Я не школьник! Не буду отвечать на такой простой вопрос!»

Тогда экзаменатор предложил ему решить очень трудное уравнение. За несколько минут Эварист набросал на классной доске оригинальное решение. Не поняв способа решения, экзаменатор засмеялся. Отчаявшись убедить экзаменатора в правильности приемов своего решения, Эварист швыряет в него губку для стирания мела.

Впрочем, так ли все было на экзамене, известно не вполне достоверно. Но сохранилась запись Галуа о том, что этот его экзамен сопровождался «сумасшедшим хохотом экзаменаторов». Так или иначе, но в Политехническую школу он не попал.

«Почему экзаменаторы задают поступающим только запутанные вопросы? — записывает он позже. — Может показаться, что они боятся быть понятыми теми, кого спрашивают. Откуда взялась эта несчастная манера нагромождать в вопросах искусственные трудности? Неужели кто-нибудь думает, что наука слишком проста? А что из этого получается? Ученик заботится не о том, чтобы получить образование, а о том, чтобы выдержать экзамены».

## Подножки злой фортуны

Через несколько дней после неудачного экзамена новая беда: покончил с собой отец Эвариста — мэр городка Бур-ля-Рен в течение семнадцати лет, уважаемый простыми горожанами, но затравленный его политическими противниками — клерикалами и иезуитами.

Несчастья и неудачи не угасили в Галуа жажду знаний и творчества. С февраля 1830 года он посещает лекции профессоров другой высшей школы, известной под названием «*Ecole Normale*» («Нормальная»). В том же году Эварист представляет на конкурс в Академию наук новые три манускрипта. Казалось бы, теперь все хорошо. Рукопись Эвариста начал читать сам Фурье — великий математик, не ретроград. Он-то уж оценит новизну и своеобразие математических открытий Галуа!

Так и было бы, если бы жестокая фортуна не подставила очередную подножку восемнадцатилетнему Галуа: Фурье стар и вскоре умирает. А рукопись Галуа куда-то таинственно исчезает, как в прошлый раз из рук Коши.

С грустью сетует Галуа на непонятное безразличие к его работам: «Мне помощи не нужно. Мне нужны враги. Пусть возражают, спорят, пытаются опровергнуть». Верно говорится, что цена человека измеряется калибром его врагов. И Галуа жаждал борьбы вместо равнодушия.

## Неистовый республиканец

Летом 1830 года Июльская революция устраняет во Франции власть короля Карла X. Эварист со всем пылом своей натуры принимает сторону революционеров, вступает в Общество друзей народа и в артиллерию национальной гвардии, активно участвует во всех волнениях, потрясавших Париж на протяжении 1831 года, и негодует по поводу возведения на престол нового короля Луи-Филиппа вместо установления республики, считая это изменой идеалам, за которые сражались на баррикадах.

Его лишают права посещать лекции. Галуа бедствует, но не сдает свои гражданские и научные позиции.

Слово нашему современнику, поэту Алексею Маркову.

### Г а л у а

Заходил паренек в сюртучке небогатом,  
Чтобы в лавке табак и мадеру купить.  
Приглашала любезно, как младшего брата,  
Разбитная хозяйка и впредь заходить.  
Провожала до двери, вздыхая устало,  
Вслед ему разводила руками: «Чудак!  
На четыре сантима опять обсчитала,

А четыре сантима теперь не пустяк!  
Кто-то мне наболтал, будто видный ученый,  
Математик какой-то мосье Галуа.  
Как же может открыть мировые законы  
Эта вот, с позволения сказать, голова?!»  
Но всходил на мансарду обманутый ею,  
Брал заветный набросок в чердачной пыли  
И доказывал вновь с беспощадностью всею,  
Что хозяева сытых желудков — нули.

14 июля 1831 года, в день взятия Бастилии, Галуа с карабином в руках и кинжалом под мундиром национального гвардейца шел в первых рядах манифестантов. Зачинщиков беспорядков, в их числе Галуа, арестовывают. Приговор ему: «На полгода в тюрьму».

## Знакомый «почерк» полиции

Гений, непонятый и непризнанный при жизни даже крупнейшими математиками, для полиции тем более всего лишь политический смутьян, «неистовый республиканец» (по характеристике самого prefecta полиции). Вот полиция и приступает к осуществлению своих излюбленных трюков: сначала в камеру — последнее обиталище Галуа — влетает якобы шальная пуля, пущенная с чердака соседнего дома, расплывшаяся о стену в нескольких сантиметрах от его головы; затем подстраивается знакомство Галуа с некоей особой женского пола, оказавшейся вместе с ним в тюремной больнице, куда в марте 1832 года поместили Галуа в связи с ухудшением его здоровья. Суть подлого замысла его политических врагов состояла в том, чтобы спровоцировать ревность и как следствие — дуэль. В эту сеть, расставленную полицией, и попал честный, принципиальный, гордый Галуа.

## Последняя ночь жизни

И вот последняя в его жизни майская ночь 1832 года. Предчувствуя трагичный для себя исход дуэли, он всю ночь лихорадочно дорабатывает свои рукописи сотворенной им новой, оказавшейся впоследствии очень актуальной, математической науки — «теории групп», полностью раскрывшей тайны существования решений алгебраических уравнений. Делает на полях рукописи редакционные пометки и горестные замечания: «...осталось немного для завершения этих доказательств, но у меня мало времени...» Пишет письмо единственному своему другу, в котором кратко излагает содержание своих исследований и просит его обратиться к крупнейшим математикам для оценки важности этих результатов — в их истинности он не сомневался...

Наступившим утром 30 мая 1832 года случайный прохожий заметил на лужайке тяжело раненного в живот молодого человека. Это был Галуа. Раненого отвезли в больницу, где он скончался утром следующего дня на двадцать первом году жизни. Похоронили его в общей могиле на кладбище Монпарнас. Ныне от этого погребения не сохранилось и следа.

В ночь перед дуэлью Эварист написал, адресуясь ко «всем республиканцам»: «Жизнь моя угасла в жалкой лужице клеветы... Прощайте! Я отдал свою жизнь на благо народа!» Одно из его писем оканчивается латинской фразой: «Nitens lux, horrenda procella, tenebris acternis involuta» — «Ослепительный свет, страшная буря, вечным мраком окутанная».



## Время триумфа наступило

Только 14 лет спустя все сохранившиеся работы Галуа (60 страниц рукописи) были разобраны и опубликованы. «Теория групп», созданная могучим напряжением ума и воли Галуа, вошла в мир математики. Но полное признание пришло еще позже — в семидесятых годах прошлого столетия. Настоящий триумф идеи Галуа получили в наше время. Теперь уже тысячами исчисляется число работ, посвященных «группам» и «полям» Галуа, «когомологии Галуа», методам теории групп и их многочисленным применениям, в частности, к раскрытию тайн строения кристаллов и атомов.

Вспоминая стихотворение А. Маркова о Галуа, свой рассказ завершу такими строками:

Добавить следует к тому, что сказано поэтом:

Да, Галуа республиканцем был — все верно это,  
«Неистовым» — по прозвищу, опасным для  
«желудков сытых»,  
Но в записях «заветных» им не были раскрыты  
Законы политической борьбы. Их Галуа не знал.

В «заветных записях» он в тайну уравнений проникал:  
Когда решений в радикалах нет, когда они все ж есть?  
Ответ был найден в свойствах групп, — групп Галуа, —

Как их называли позже в его честь.  
 Трагична Галуа судьба. При жизни не был  
 понят гений  
 Учеными. Труды не издавались. Ему шел  
 двадцать первый год,  
 Когда на грязной и подстроенной дуэли  
 его убил какой-то скот.  
 Минули годы... И наступил триумф его  
 прозрений:  
 Учение о группах — суть многих из наук  
 теперь  
 И в эру НТР оно им приоткрыло дверь.

В учении о группах успехов алгебры  
 секрет.  
 Об этом вот поэму надо бы сложить, поэт!  
 Из книги Б. А. Кордемского  
 «Увлечь школьников математикой»  
 (М.: Просвещение, 1981)

Теперь имя Галуа — юноши гор-  
 дого, непримиримо честного, гения с  
 удивительной и трагической судь-  
 бой, — одно из самых именитых и по-  
 пулярных в математике.

## Уголок дополнительных сообщений и задач

### Перестановки

Размещение  $n$  различных предме-  
 тов на  $n$  различных местах назы-  
 вается перестановкой.

Пример. Рассмотрим возмож-  
 ные способы размещения трех спорт-

сменов А, Б, В на трех местах  
 пьедестала победителей. Каждый из  
 них равноправно может занять как  
 первое, так и второе, и третье место.

Получается следующая схема ва-  
 риантов мыслимого их размещения:



Число всех возможных перестано-  
 вок  $n$  предметов обозначается как  
 $P_n$ . Для  $n=3$   $P_3=1 \cdot 2 \cdot 3=3!$  Для  
 $n=2$ , очевидно,  $P_2=1 \cdot 2=2!$ , и для  
 $n=1$   $P_1=1=1!$  Вообще число  
 перестановок для  $n$  предметов равно  
 $P_n=1 \cdot 2 \dots n=n!$  (эн факториал).

Докажем справедливость этой  
 формулы, опираясь на принцип мате-  
 матической индукции. Положим, что  
 для  $n=k$  различных предметов фор-  
 мула верна, т. е.  $P_k=k!$  Покажем,  
 что она верна и для  $n=k+1$  пред-  
 метов. Любой один предмет из за-  
 данных  $k+1$  предметов можно  
 поставить на первое место. В каждом  
 из этих  $k+1$  случаев остающиеся  $k$   
 предметов можно разместить на  $k$   
 местах  $P_k=k!$  способами согласно  
 предположению. Поэтому получим  
 всего  $k! \cdot (k+1)$  способов размеще-

ния  $k+1$  предметов на  $k+1$  местах,  
 т. е.

$$P_{k+1}=k!(k+1)=(k+1)!$$

Итак, мы:

1) практически подтвердили спра-  
 ведливость формулы  $P_n=n!$  для  
 $n=k=3$ ;

2) доказали ее справедливость  
 для  $n=k+1$ , т. е. для  $k=4$ .

Теперь по индукции формула  
 справедлива для  $n=5$ , затем для  
 $n=6$  и т. д., т. е. для любого нату-  
 рального  $n$ .

Задача 1. (Слова, слова, сло-  
 ва!) Есть 6 пронумерованных кар-  
 точек, и на каждой из них написана  
 буква:

1	2	3	4	5	6
А	А	Л	Н	Т	Т



Каждую перестановку этих карточек можно рассматривать как шестизначное число и одновременно как слово (осмысленное или бессмысленное) из шести букв. Но из этих букв составляются только три осмысленных слова — какие?

Сколько различных шестизначных чисел может образоваться при формировании из указанных букв трех осмысленных слов и какую долю эти числа составят от общего количества возможных перестановок из данных шести цифр?

**Задача 2.** (*Спортпрогноз.*) В шахматном турнире между гроссмейстерами

А, Б, В, Г, Д

каждый из них занял одно из пяти мест. До начала игр предлагалось угадать, в каком порядке распределяются места между этими шахматистами. Я предположил такую последовательность от первого места к пятому:

А, Б, В, Г, Д.

Но, как выяснилось, я не указал верно ни места кого-либо из партнеров и никакой пары следующих непосредственно друг за другом участников турнира.

Мой друг оказался более удачливым, предположив последовательность

Г, А, Д, В, Б.

Он угадал места двух участников турнира, а также две пары непосредственно следующих друг за другом партнеров.

Сообщенных сведений достаточно, чтобы определить, как в действительности распределились места между пятью гроссмейстерами.

**Задача 3.** (*Забава ансамбля музыкантов.*) Семь музыкантов ознакомили наступление XX века так: с первого же дня, т. е. с 1 января

1901 года, стали проводить свои репетиции, усаживаясь всегда в один ряд, и забавлялись при этом тем, что в каждый следующий день репетиций меняли порядок своего размещения на семи стульях. Таким образом за некоторое время они осуществили все возможные различные перестановки для семи человек и на этом закончили свою затею с пересаживанием в дни репетиций.

В каком году, месяце и какого числа закончилась эта забава музыкантов, если известно, что между днями репетиций они имели еще 804 дня, свободных от музицирования?

### Треугольная витрина интересных чисел

Точки плоскости  $M(m; n)$  с целыми неотрицательными координатами  $m=0, 1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots$  называют узлами решетки точек  $M(m; n)$ .

Пусть некая частица, первоначально размещившаяся в точке  $O(0; 0)$ , перемещаясь от узла к узлу только вправо и вверх, совершает маршрут, оканчивающийся в точке  $M(m; n)$ . Очевидно, что к любому узлу на оси  $Ox$  и на оси  $Oy$  возможен лишь один маршрут, но уже к узлу  $(1; 1)$  ведут два маршрута (на рисунке 70 отмечены стрелками), к узлу  $(2; 2)$  — шесть маршрутов и т. д.

На рисунке 70 около каждого узла записано число всех возможных маршрутов, ведущих к этому узлу.

Сведем эти числа в треугольную таблицу, названную в честь Паскаля *треугольной витриной чисел Паскаля*, короче — *треугольником Паскаля*:

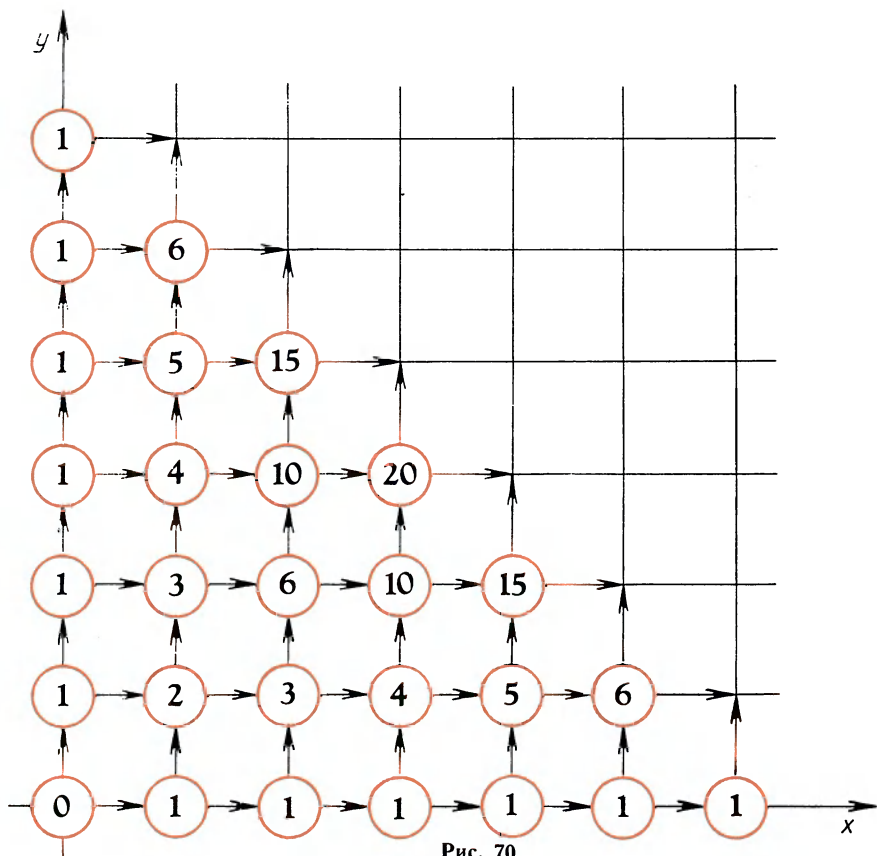


Рис. 70

<div><div>n \ m</div></div>	Треугольник Паскаля										Сумма чисел в строке
	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
0	1									$2^0$	
1	1	1								$2^1$	
2	1	2	1							$2^2$	
3	1	3	3	1						$2^3$	
4	1	4	6	4	1					$2^4$	
5	1	5	10	10	5	1				$2^5$	
6	1	6	15	20	15	6	1			$2^6$	
7	1	7	21	35	35	21	7	1		$2^7$	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	$2^8$	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	...	

Закон заполнения «витрины» чисел Паскаля прост: в нулевом столбце и по диагонали поставить единицы и под вторым из двух рядом стоящих чисел записать их сумму. Например, сумма рядом стоящих чисел 4 и 6 дает число 10, записанное в следующей строке под вторым слагаемым.

Заметим, что для любого числа в треугольнике Паскаля номер столбца не больше номера строки, на пересечении которых находится рассматриваемое число, т. е.  $m \leq n$ , причем счет столбцов и строк идет не с 1, а с 0.

Обозначим через  $C_n^m$  число, стоящее в таблице на пересечении  $n$ -й строки и  $m$ -го столбца. Так как нулевой столбец и диагональ, для чисел которой  $m=n$ , заполнены единицами, то будем считать, что  $C_n^0=1$  и  $C_n^n=1$  при  $n=0, 1, 2, \dots$

Теперь правило заполнения треугольника Паскаля числами можно выразить формулой

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m. \quad (1)$$

Правая часть этой формулы как бы отсылает нас к предшествующей,  $(n-1)$ -й строке, чтобы получить число  $n$ -й строки (осуществляя возврат — рекурсию). Такого рода формулы и называют *рекуррентными*. Но рекуррентная формула «тихоходна». С ее помощью несложно добраться до какого-нибудь числа, например до числа из 30-й строки ласкалева треугольника. Для этого надо знать числа 29-й строки, а они, в свою очередь, определяются числами 28-й строки и т. д., вплоть до 1-й и 0-й строк. Поэтому, естественно, возникает желание иметь такую формулу, которая давала бы «прямое попадание» в искомое число, т. е. способ получения числа  $C_n^m$  при помощи определенных действий непосредственно над заданными значениями  $n$  и  $m$ .

Такая формула есть! Вот она:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad m \leq n. \quad (2)$$

Чтобы формула была верна и при  $m=n$ , условливаемся считать, что  $0!=1$ .

**З а д а ч а 4. (Тождественность!)** Докажите тождественность формул (2) и (1).

**З а м е ч а н и е.** Тех, кого интересует вывод формулы (2) — непосредственный или с применением принципа математической индукции, отсылаем к книгам:

Колмогоров А. Н. и др. Введение в теорию вероятностей.— М., 1982.

Кордемский Б. А. Математика изучает случайности.— М., 1975.

### Красота, таящаяся в треугольнике Паскаля

Рассматривая «витрину» чисел Паскаля (с. 86), можно обнаружить немало красивых числовых соотношений.

1. Сумма всех чисел  $n$ -й строки равна  $2^n$ , т. е.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (3)$$

2. В любой строке числа, равноудаленные от ее концов, равны между собой, т. е.

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \quad (4)$$

3. Суммы чисел вдоль наклонных прямых (первые шесть наклонных показаны на фигуре треугольника Паскаля) образуют последовательность Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Значит, каждый член последовательности Фибоначчи может быть представлен суммой некоторого количества чисел Паскаля. Вот каков, например, седьмой член последовательности Фибоначчи:

$$13 = C_6^0 + C_5^1 + C_4^2 + C_3^3.$$

4. Число, расположенное на пересечении  $k$ -го столбца и  $(2k+1)$ -й строки, равно сумме всех чисел, находящихся над ним ( $k=0, 1, 2, \dots$ ).

Пусть, например,  $k=3$ , тогда  $2k+1=7$ . На пересечении 3-го столбца и 7-й строки расположено число 35, и действительно  $35=20+10+4+1$ .

Есть еще такие соотношения, которые связаны с понятием квадратной матрицы и ее определителя: если четыре числа расположены в две строки и два столбца, то говорят, что они образуют квадратную матрицу  $2 \times 2$ :  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ , а число

$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$  называют определителем 2-го порядка.

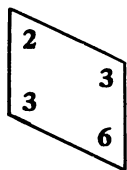
5. Определитель 2-го порядка из любых четырех соседних чисел 1-го и 2-го столбцов равен числу в правом нижнем углу соответствующей матрицы. Взгляните на матрицу в квадратной рамке. Определитель этой матрицы

$$\Delta = 6 \cdot 21 - 7 \cdot 15 = 21.$$

Сумма чисел такой матрицы равна квадрату числа в левом нижнем углу.

6. Если любые четыре соседних числа 1-го и 2-го столбцов обнять скошенной рамкой, то определитель  $\Delta$  такой «скошенной» матрицы равен числу в ее правом верхнем углу.

Например, для матрицы



$$\Delta = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 3.$$

**Задача 5. (Торжество индукции.)** Докажите справедливость равенств (3) и (4) для любого натурального  $n$ .

Соотношения, описанные в пунк-

тах 4, 5 и 6, выразите языком символов вида  $C_n^m$ , помня, что  $C_n^m$  — число, расположенное на пересечении  $n$ -й строки и  $m$ -го столбца треугольника Паскаля.

## Выборки-сочетания

Пусть есть  $n$  предметов. Если все мыслимые выборки по  $m$  предметов из данных  $n$  предметов различаются хотя бы одним элементом, то такие выборки называются *сочетаниями*.

Ищу я в этом мире сочетанья  
Прекрасного и вечного...

И. Бунин

**Пример.** Из четырех космонавтов  $A, B, C, D$  можно составить 6 различных экипажей в составе двух человек:

$AB, AC, AD, BC, BD, CD$ .

Это число 6, представляющее собой 6 сочетаний из четырех элементов по два, есть на витрине чисел Паскаля, и расположено оно как раз на пересечении 4-й строки и 2-го столбца, т. е.  $6 = C_4^2$ . И это не случайно. Оказывается, что всегда число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  такое же, как число маршрутов по узлам решетки от точки  $O(0; 0)$  до точки  $M(m; n)$ , такое же, как число, расположенное на пересечении  $n$ -й строки и  $m$ -го столбца треугольника Паскаля, т. е. определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad m \leq n.$$

В дальнейшем в интересах общности для этой формулы можно снять ограничения  $m \leq n$ , т. е. допустить (формально) возможность  $m > n$ , но в каждом таком случае разумно полагать, что

$$C_n^m > n = 0.$$

К вопросу о выводе формулы для числа сочетаний см. замечание на с. 87.

$$1 + 2 + \dots + n = C_{n+1}^2, \quad (5)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = C_{n+1}^3 + C_{n+2}^3, \quad (6)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = C_{n+1}^4 + 4 \cdot C_{n+2}^4 + C_{n+3}^4 \quad (7)$$

являются тождествами на множестве натуральных чисел.

Убедимся в том, что равенство (7) имеет место при  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$ .

При  $n=1$  левая часть равна

$$1^3 = 1,$$

правая:

$$C_2^4 + 4 \cdot C_3^4 + C_4^4 = 0 + 4 \cdot 0 + 1 = 1.$$

При  $n=2$  левая часть:

$$1^3 + 2^3 = 9,$$

правая:

$$C_3^4 + 4 \cdot C_4^4 + C_5^4 = 0 + 4 \cdot 1 + 5 = 9;$$

$$9 = 9.$$

При  $n=3$  левая часть:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36,$$

правая:

$$C_4^4 + 4 \cdot C_5^4 + C_6^4 = 1 + 4 \cdot 5 + 15 = 36;$$

$$36 = 36.$$

Проверка справедливости равенства при частных значениях  $n$  не является доказательством того, что оно тождество. Поэтому возникает такое задание: доказать, что утверждения (5), (6) и (7) справедливы.

**Задача 7.** (Сделайте открытие!) Попытайтесь сконструировать тождество для суммы четвертых степеней  $n$  натуральных чисел, аналогичное соотношениям (5), (6), (7).

**Задача 8.** (Гостиница для команды футболистов.) Сколькими способами можно разместить 12 футболистов в шести свободных номерах гостиницы по два человека в каждом номере?

**Задача 9.** (Потребуется рассуждения, характерные для математических доказательств.) На плос-

**Задача 6.** (Букет из трех математических «гвоздик».) Утверждается, что выражения

кости размещены 25 точек так, что среди любых трех из них найдутся две, расстояние между которыми меньше 1.

Докажите, что найдется круг радиуса 1, содержащий не менее 13 из этих 25 точек.

**Задача 10.** (Для сообразительных минута на решение.) Дано 10 чисел, о которых известно, что их сумма равна 0, а все их попарные произведения не отрицательны. Каковы эти числа?

**Задача 11.** (Числовой ребус.)

$$\text{МОА} - \text{ЛЕО} = \text{РЗЕ}$$

$$\begin{array}{r} \vdots \\ \text{ХР} \cdot \text{М} = \text{ЛМА} \end{array}$$

$$\text{ЛО} + \text{ЛЗЛ} = \text{ЛИЕ}$$

Из букв ребуса можно составить имя знаменитого узбекского математика, жившего более 1000 лет назад, тогда соответствующие буквам цифры составят возрастающую последовательность.

### Группы подстановок

Пусть имеется  $n$  предметов, каждому из которых присвоен порядковый номер 1, 2, ...,  $n$ . Произведем перенумерацию этих предметов и зададим соответствие новых номеров первоначальным таблицей из двух строк:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_n$  — те же числа 1, 2, ...,  $n$ , но расположенные в другом порядке. Для  $n$  различных пред-

метов возможно  $n!$  их перестановок. Столько же возможно и соответствующих различных таблиц указанного вида. Их называют *подстановками*.

Например, для трех чисел 1, 2, 3 возможны следующие  $3! = 6$  подстановок:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество подстановок из  $n$  предметов обычно обозначается через  $S_n$ .

Если последовательно произвести подстановки одну за другой, то в результате получится опять подстановка, называемая *произведением* двух данных подстановок.

Перемножим, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P_5 \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = P_4.$$

По первой подстановке единица заменяется тройкой, а по второй — эта тройка остается на месте. Значит, в результате последовательного совершения обеих подстановок единица перейдет в тройку. Также можно убедиться, что двойка перейдет в единицу и тройка — в двойку. Получаем:

$$P_5 \cdot P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Любопытно, что  $P_5 \cdot P_4 \neq P_4 \cdot P_5$  (убедитесь в этом!). Подстановка

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

называется *тождественной* (объекты остаются на своих местах).

У каждой подстановки ( $P_i$ ) имеется обратная к ней ( $P_i^{-1}$ ), дающая

в произведении с данной *тождественную* подстановку:

$$P_i \cdot P_i^{-1} = e.$$

Подстановка, обратная к данной, ставит все числа, смещенные данной подстановкой, на их прежние места.

**З а д а ч а.** Убедитесь в том, что для подстановок из трех предметов подстановка  $P_2$  обратная к  $P_1$ , т. е. что

$$P_1 \cdot P_2 = P_0 = e, \text{ или } P_1^{-1} = P_2,$$

а также

$$P_2^{-1} = P_1, P_3^{-1} = P_3, P_4^{-1} = P^4, \\ P_5^{-1} = P^5, P_0^{-1} = P_0.$$

Если на множестве некоторых элементов (например, подстановок) определено действие умножения так, что произведение любых двух элементов множества также содержится в этом множестве и вместе с каждым элементом содержится обратный ему элемент, то такое (не пустое) множество Галуа предложил называть *группой* (в данном случае *конечной группой*).

Если для всех попарных умножений элементов группы выполняется свойство переместительности, то группа называется *коммутативной* или *абелевой группой*. В противном случае она называется *некоммутативной*. Подстановки  $S_n$  при  $n > 2$  являются примером конечных некоммутативных групп.

**З а д а ч а.** Докажите, что  $S_2$  — коммутативная группа.

Бывает, что часть  $H$  группы  $G$  сама образует группу. Тогда  $H$  называют *подгруппой* группы  $G$ .

### Открытие Галуа на примере группы $S_3$

Поскольку в группе  $S_3$  всего 6 элементов — подстановок ( $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ), то нетрудно составить таблицу умножения этих элементов:



	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$P_0$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$P_1$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_4$	$P_5$	$P_3$
$P_2$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_5$	$P_3$	$P_4$
$P_3$	$P_3$	$P_5$	$P_4$	$P_0$	$P_2$	$P_1$
$P_4$	$P_4$	$P_3$	$P_5$	$P_1$	$P_0$	$P_2$
$P_5$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_0$

Из этой таблицы видно, что в  $S_3$  содержится одна подгруппа, состоящая из одного элемента —  $P_0$ , и одна подгруппа из трех элементов  $P_0, P_1, P_2$  — выделена рамкой. Для этой группы из трех эле-

ментов введем специальное обозначение:  $Z_3$ . Из таблицы видно также, что  $Z_3$  — коммутативная группа.

Пара элементов  $P_0, P_3$  также образует подгруппу, причем коммутативную. В самом деле, тождественная подстановка есть —  $P_0, P_0 \cdot P_3 = P_3$  — элемент этой подгруппы, обратные подстановки —  $P_0^{-1} = P_0, P_3^{-1} = P_3$  — элементы этой группы и, наконец,  $P_0 \cdot P_3 = P_3 \cdot P_0$ .

**Задача.** Найдите по таблице еще две подгруппы из двух элементов каждая. Убедитесь в том, что, кроме указанных, других подгрупп в  $S_3$  нет.

Произведение любых двух подстановок  $(P_i \cdot P_j)$  на произведение соответствующих им обратных подстановок  $(P_i^{-1} \cdot P_j^{-1})$  назовем *коммутатором подстановок*  $P_i, P_j$  и обозначим так:  $[P_i, P_j]$ . Например:

$$\begin{aligned}
 [P_1, P_5] &= P_1 \cdot P_5 \cdot P_1^{-1} \cdot P_5^{-1} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_2.
 \end{aligned}$$

Если теперь  $P_2$  умножить на произведение  $P_5 \cdot P_1$ , то получится  $P_1 \cdot P_5$ . В самом деле,  $P_5 \cdot P_1 = P_4$  (см. таблицу),  $P_2 \cdot P_4 = P_3$ , а  $P_3 = P_1 \cdot P_5$ . Значит, коммутатор элементов  $P_1, P_5$  является корректирующим множителем, действующим на обмен местами перемножаемых подстановок:

$$[P_1, P_5] \cdot P_5 \cdot P_1 = P_1 \cdot P_5.$$

Множество всех возможных коммутаторов для элементов группы  $G$  является ее подгруппой  $G'$  и называется производной группой группы  $G$ . Ясно, что если группа  $G$  коммутативна, то коммутатором любой пары ее элементов будет тождественная подстановка  $e$ , которая, следовательно, и будет единственным

элементом подгруппы  $G'$ . Например, для коммутативной группы  $Z_3 = (P_0, P_1, P_2)$  таблица коммутаторов выглядит так:

$[P_i, P_j]$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
$P_0$	$P_0$	$P_0$	$P_0$
$P_1$	$P_0$	$P_0$	$P_0$
$P_2$	$P_0$	$P_0$	$P_0$

Значит, подгруппа  $Z'_3$  действительно состоит из одного элемента:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e.$$

Проверьте себя, не ослабло ли понимание излагаемых рассуждений; составьте самостоятельно таблицу, задающую коммутаторы всей группы  $S_3$ . Должно получиться так:

$[P_i, P_j]$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$P_0$	$P_0$	$P_0$	$P_0$	$P_0$	$P_0$	$P_0$
$P_1$	$P_0$	$P_0$	$P_0$	$P_2$	$P_2$	$P_2$
$P_2$	$P_0$	$P_0$	$P_0$	$P_1$	$P_1$	$P_1$
$P_3$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
$P_4$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_2$	$P_0$	$P_1$
$P_5$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$P_0$

Из таблицы видно, что группа коммутаторов  $[P_i, P_j]$  группы  $S_3$ , т. е.  $S'_3$  — производная группы  $S_3$ , состоит из трех подстановок  $(P_0, P_1, P_2)$ , образующих коммутативную группу  $Z_3$ ,  $S'_3 = Z_3$ . В свою очередь,  $Z'_3 = P_0 = e$ , но  $Z'_3 = (S'_3)' = S''_3$  — вторая производная группы  $S_3$ . Итак,  $S''_3 = e$ .

В общем случае конечной группы  $G$  последовательное формирование производных групп:  $G', G'', \dots$  — либо приводит на каком-либо  $k$ -м шаге к группе, состоящей лишь из одной тождественной подстановки, и тогда  $G$  называется *разрешимой группой*, либо нет, и тогда  $G$  — *неразрешимая группа*.

Например, группа  $S_3$  разрешима, так как мы убедились, что

$$S''_3 = P_0 = e.$$

Но разрешима далеко не всякая группа. В работе Галуа «Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах» впервые показано, что введенные им в математику группы подстановок  $S_n$  разрешимы для  $n=2, 3$  и  $4$  и неразрешимы для всех  $n \geq 5$ .

В том же «Мемуаре...» с каждым алгебраическим уравнением вида

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Галуа связывает определенным образом сформированную группу подстановок  $G(f)$ , содержащуюся в  $S_n$ , названную впоследствии группой Галуа уравнения  $f(x) = 0$ , и доказывает основную теорему своей «теории групп»:

уравнение  $f=0$  разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда разрешима группа Галуа для этого уравнения.

Существенно, что группу  $G(f)$ , как правило, можно формировать, зная лишь коэффициенты

$$(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

рассматриваемого уравнения. При более или менее произвольном наборе коэффициентов

$$(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

получается, что  $G(f) = S_n$ , и, так как группа  $S_n$  не является разрешимой для  $n \geq 5$ , то общее уравнение степени  $n \geq 5$  неразрешимо в радикалах. Разумеется, некоторые частные уравнения 5-й и более высоких степеней решаются в радикалах, но всякий раз это означает, что в этом частном случае соответствующая группа Галуа является разрешимой подгруппой группы  $S_n$ .

**Задача.** Зная, что в общем случае группой Галуа уравнений 4-й степени будет  $S_4$ , докажите, что она разрешима. При каком значении  $k$  производная  $S_4^{(k)}$  окажется коммутативной группой?

### Из коллекции математических шедевров

$$\text{Функция } F(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} \text{ непри-}$$

мечательна с виду, а каким замечательным свойством обладает: она инвариантна относительно каждой из следующих подстановок:

$$x = u, \quad x = \frac{1}{u}, \quad x = 1 - u, \quad x = \frac{u}{u-1} —$$

и еще двух подстановок, которые попытайтесь обнаружить по аналогии с указанными.

Функция  $F(x)$  инвариантна относительно подстановки

$$x = g(u), \text{ если } F(g(u)) = F(u).$$

Проверим инвариантность заданной функции, например, относительно подстановки  $x = \frac{u}{u-1}$ :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{u}{u-1}\right) &= \left(\left(\frac{u}{u-1}\right)^2 - \frac{u}{u-1} + 1\right)^3 : \left(\left(\frac{u}{u-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{u}{u-1} - 1\right)^2\right) = \\ &= \left(\frac{u^2 - u(u-1) + (u-1)^2}{(u-1)^2}\right)^3 : \frac{u^2}{(u-1)^4} = \frac{(u^2 - u + 1)(u-1)^4}{u^2(u-1)^6} = \frac{u^2 - u + 1}{u^2(u-1)^2} = F(u). \end{aligned}$$

**Задача 12.** (*Красивое уравнение и решается красиво.*) Располагая всем набором подстановок для данной функции  $F(x)$  (четыре указаны, а две надо найти), трудно сообразить, как можно без больших усилий решить уравнение 6-й степени:

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}, \quad a \neq 0, a \neq 1.$$

**Задача 13.** (*Робертино помогает комиссару Катани.*) Мимо Робертино промчался автомобиль с преступниками. Позже на вопрос комиссара Катани мальчик ответил, что номер машины не запомнил, но припоминает, что он был четырехзначным палиндромом (симметричным) и сумма его цифр совпадала

с числом, образуемым первыми двумя цифрами. Эти сведения оказались достаточными, чтобы точно определить номер машины, и преступники были схвачены.

**Задача 14.** (*Случайность или закономерность?*) С плота, плывущего по Каме-реке, одновременно прыгнули в воду двое и поплыли: один по течению, а другой против течения. Через несколько минут, по сигналу друга, оставшегося на плоту, оба одновременно развернулись и к общему изумлению подплыли к плоту также одновременно. Нужно ли производить какие-то вычисления, чтобы выяснить: случайно ли такое совпадение времени движения пловцов, а если закономерно, то объяснить?

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Три осмысленных слова: ТАЛАНТ, АТЛАНТ, ТАНТАЛ. Шестизначных чисел может быть выложено  $6! = 720$ . Слову

Т	А	Л	А	Н	Т
↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	1	3	2	4	6

соответствует число 513246 и еще три других числа, получающиеся при обмене местами букв А и букв Т: (523146), (613245), (623145), т. е. 4 перестановки.

Столько же перестановок формируют каждое из двух других осмысленных слов. Всего с осмысленными словами окажется 12 перестановок. Их доля в общем количестве возможных перестановок составляет  $\frac{12}{720} = \frac{1}{60}$ . Число  $\frac{1}{60}$  можно рассматривать как вероятность составить осмысленное слово, если 6 карточек с указанными буквами перемешать и выкладывать на стол одну за другой наугад.

2. Нет нужды составлять все  $5! = 120$  перестановок из А, Б, В, Г и Д. Надо рассмотреть только те перестановки, в которых на первом месте не А, на втором — не Б и т. д. и нет рядом стоящих АВ, или ВВ, или ВГ, или ГД (первая часть условия). Например, с Г на первом месте (как у моего друга) возможны 24 перестановки, но легко убедиться, что высказанному требованию удовлетворяют только четыре:

Г А Д В Б, Г В Д Б А,  
Г В Б Д А, Г В А Д Б.

Не больше будет конкурирующих перестановок с Б, В и Д на первом месте. Сравнивая все образовавшиеся перестановки с (Г А Д В Б), в которой два места и две

пары «соседей» указаны правильно (вторая часть условия задачи), найдем искомую:

Д Г А В Б.

3. Затея с пересаживаниями длилась  $7! + 804$  календарных дня, т. е.  $5040 + 804 = 5844$  дня. Если это количество календарных дней составляет  $x$  лет, то из них  $\frac{x}{4}$  високосных.

Поэтому

$$5844 = \frac{x}{4} \cdot 366 + \frac{3x}{4} \cdot 365,$$

откуда  $x = \frac{23376}{1461} = 16$  (лет).

Следовательно, свою забаву музыканты закончили в 1916 году, 31 декабря.

4. Согласно формуле (2)

$$C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!},$$

$$C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}.$$

Складывая оба равенства, получаем:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m &= \frac{m(n-1)! + (n-1)!(n-m)}{m!(n-m)!} = \\ &= \frac{(n-1)!(m+n-m)}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!n}{m!(n-m)!} = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m. \end{aligned}$$

5. Для доказательства тождества (3) воспользуемся принципом математической индукции:

1) Предположим, что для какого-либо

натурального  $n = k > 1$  верно, что

$$C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k = 2^k.$$

2) Докажем, что оно верно и для  $n = k + 1$ , т. е. что

$$C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 + \dots + C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}.$$

$$C_{k+1}^0 = C_k^0 + C_k^1, \quad C_{k+1}^1 = C_k^1 + C_k^2, \quad \dots, \quad C_{k+1}^k = C_k^{k-1} + C_k^k,$$

$$C_{k+1}^{k+1} = C_k^k + C_k^{k+1} = C_k^k \quad (\text{так как } C_k^{k+1} = 0).$$

Тогда

$$C_k^0 + (C_k^1 + C_k^1) + (C_k^1 + C_k^2) + \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k) + C_k^k = 2(C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

3) Непосредственным подсчетом подтверждаем правильность равенства (3) для  $k = 1$ :

$$C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2^1$$

и по индукции заключаем, что равенство (3) справедливо для любого натурального  $n$ , т. е. является тождеством на множестве  $n \in \mathbb{N}$ .

Тождество (4) подтверждается применением к его левой и правой частям формулы (2).

6. У к а з а н и е. Вначале полюбуйтесь забавными тождествами на множестве натуральных чисел:

$$(n+1)^2 = C_{n+1}^2 + C_{n+2}^2, \quad (8)$$

$$(n+1)^3 = C_{n+1}^3 + 4 \cdot C_{n+2}^3 + C_{n+3}^3. \quad (9)$$

Вы легко убедитесь в их правильности, произведя преобразование правой части каждого равенства по формуле (2).

Формулами (8) и (9) можете воспользоваться при доказательстве тождеств (6) и (7) методом математической индукции.

7. Эту задачу я решил так: по аналогии с (5), (6) и (7) предположил, что искомое тождество имеет вид:

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = C_{n+1}^5 + M \cdot C_{n+2}^5 + N \cdot C_{n+3}^5 + C_{n+4}^5,$$

взял частное значение  $n = 4$  и старался подобрать натуральные значения  $M$  и  $N$ , удовлетворяющие получившемуся уравнению.

Сравнительно легко нашел, что  $M = N =$

Для первого слагаемого сразу имеем:

$$C_{k+1}^0 = 1 = C_k^0.$$

Ко всем последующим слагаемым применим рекуррентную формулу (1):

= 11. Затем доказал сконструированное тождество:

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = C_{n+1}^5 + 11 \cdot C_{n+2}^5 + 11 \cdot C_{n+3}^5 + C_{n+4}^5.$$

8. Первое решение. Пусть № 1 гостиницы предоставлен футболисту  $A_1$  — одному из двенадцати. Есть 11 способов подселить к нему второго футболиста. Пусть № 2 гостиницы предоставлен футболисту  $A_2$  — одному из десяти оставшихся после того, как двое заняли № 1. Есть 9 способов подселить к нему второго футболиста.

Сочетая каждый из одиннадцати способов заселения № 1 с девятью способами заселения № 2, получим  $11 \cdot 9$  способов заселения двух номеров гостиницы. Продолжая так же рассуждать в отношении остальных футболистов, получим ответ: существует

$$11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

способов размещения двенадцати футболистов по 2 человека в каждый из шести номеров гостиницы.

Второе решение. Сочетать парами 12 человек можно  $C_{12}^2$  способами. Когда одной паре предоставлен номер (любой из шести), то оставшиеся 10 человек сочетать парами можно  $C_{10}^2$  способами и т. д.

По такой схеме рассуждений получается, что для размещения двенадцати футболистов в шести номерах по 2 человека в каждом существует

$$C_{12}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{12!}{2^6} \text{ способов.}$$

Но это число включает также и число возможных порядков расселения конкретной шестерки пар по шести номерам гостиницы, т. е. число перестановок из 6 элементов, равное 6!

Так как по смыслу задачи выбор последовательности номеров гостиницы, в которой они поселяются, не имеет значения, то ответом на задачу будет служить число

$$\frac{12!}{2^6 \cdot 6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{2^6 \cdot 6!} = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3.$$

9. Пусть  $A$  и  $B$  — две из данных точек. Построим два круга радиуса 1 с центрами в этих точках. Всякая третья точка удалена меньше чем на 1 либо от точки  $A$ , либо от точки  $B$  и, значит, находится внутри одного из этих кругов, т. е. два этих круга содержат все 25 точек, а в одном из них наверняка больше 12, но меньше 13 точек.

10. Нетрудно понять, что все эти числа — нули: поскольку все их попарные произведения неотрицательны, то среди них не может быть чисел разных знаков, а в силу равенства нулю их суммы среди них не найдется ни одного отличного от нуля.

## 11. Узбекский математик

А	Л	Х	О	Р	Е	З	М	И
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	2	3	4	5	6	7	8	9

От названия одной из его работ произошел термин АЛГЕБРА.

12. Еще две подстановки, относительно которых функция инвариантна, таковы:

$$x = \frac{1}{u-1} \text{ и } x = \frac{u-1}{u}.$$

Очевидный корень уравнения:  $x=a$  — соответствует подстановке  $x=u$ . Остальные подстановки сразу дают нам еще 5 корней:

$$\frac{1}{a}, 1-a, \frac{1}{1-a}, \frac{a}{a-1}, \frac{a-1}{a}.$$

13. Симметричное четырехзначное число имеет вид  $\overline{abba}$ . По условию,  $2a+2b=10a+b \Rightarrow b=8a$ , что возможно лишь при  $a=1, b=8$ . Номер машины: 1881.

14. Так и должно быть всегда, если собственные скорости в стоячей воде пловцов одинаковы, как и было, очевидно, в данном случае. Скорость течения реки не оказывает влияния на общее время движения пловцов, так как река одинаково сносит и плот и пловцов.



# КОРИФЕЙ МАТЕМАТИКИ XIX ВЕКА ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ



П. Л. Чебышев (1821—1894)

## Привыкает «к точности и анализу»

Корнет казачьего полка Лев Павлович Чебышев и его супруга дали своему первому сыну, родившемуся 26 мая 1821 года в селе Окатово Калужской губернии, редкое имя — Пафнутий. О детстве Пафнутия Львовича — великого русского математика мы знаем очень мало. Грамоте его обучала мама, а французскому и арифметике — двоюродная сестра. Учился Пафнутий и музыке, правда, безуспешно, но не бесследно: занятия музыкой, как он признал впоследствии, приучили его «к точности и анализу».

Вполне возможно также, что восприятие гармонии на музыкальных занятиях в сочетании с восприятием загадочных закономерностей мира чисел воспитывало в юном

Чебышеве ощущение внутренней красоты и поэтичности математики.

В объединении слов — поэтичность математики — нет ничего несовместимого. Известно крылатое изречение С. В. Ковалевской — первой женщины-математика, заслужившей докторский диплом «с высшей похвалой»: «Невозможно быть математиком, не будучи в то же время и поэтом в душе».

О том же с убедительностью ученого свидетельствует в своем стихотворении известный наш биохимик М. В. Бромлей:

Это ложь, что в науке поэзии нет.  
В отраженьях великого мира  
Сотни красок и звуков уловит поэт  
И повторит волшебная лира.

Молодой вулканолог, глаза заслоня,  
Замерев от восторга и страха,  
Из струящейся лавы, сквозь море огня,  
Слышит явственно музыку Баха.

За чертогами формул, забыв о весне,  
В мире чисел бродя, как лунатик,  
Вдруг гармонию выводов дарит струне,  
К звучной скрипке прильнув, математик.

И поэзию силы и вечной борьбы,  
Беспощадной и лютой, как молох.  
Словно страшную книгу Великой Судьбы,  
В жизни тварей читает биолог.

Настоящий ученый, он тоже поэт,  
Вечно жаждущий знать и предвидеть.  
Кто сказал, что в науке поэзии нет?  
Нужно только понять и увидеть!



Дом, в котором жил П. Л. Чебышев, будучи студентом Московского университета

### Без чисел людям нет разумного пути

Чтобы подготовить Пафнутия и его брата Павла к поступлению в университет, Чебышевы в 1832 году переехали в Москву. Для занятий с детьми были приглашены лучшие учителя.

В 1837 году шестнадцатилетний Пафнутий Чебышев становится студентом физико-математического отделения философского факультета Московского университета, отлично учится, в 1841 году с отличием оканчивает университет, защищает диссертацию на степень магистра. В 1847 году он зачисляется адъюнктом Петербургского университета, а через два года, защитив диссер-

тацию по «теории сравнений», получает степень доктора математических наук, избирается профессором университета.

«Теория сравнений» — изящное и содержательное ответвление «теории чисел» — весьма своеобразной математической науки, изучающей свойства чисел, и прежде всего натуральных, являющихся гениальной человеческой абстракцией от физической предметности — «натуры». Неплохо сказано поэтом:

Не существующее нужно признавать!  
Вот, хоть бы числа: их нигде не  
отыскать,

Нигде нет их семян, и гнезд их не  
найти,—

Но людям нет без них разумного пути!

*К. Случевский)*

## Тайна двадцативековой давности раскрывается!

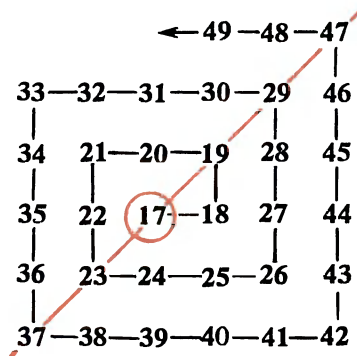
Спустя 4 года после защиты диссертации по «теории сравнений» П. Л. Чебышев избирается адъюнктом Петербургской академии наук за многое достигнутое им в науке, включая крупное открытие формулы, позволяющей хотя бы приблизительно определить, сколько простых чисел содержится на любом достаточно большом отрезке  $[1; n]$  числовой оси. Число простых чисел, не превышающих заданного натурального  $n$ , обозначается символом  $\pi(n)$ . Конечно, некоторые значения этой функции  $\pi(n)$  можно точно установить по таблице простых чисел. Так, например, на отрезке  $[1; 10]$   $\pi(10) = 4$  (2; 3; 5; 7); на отрезке  $[1; 100]$   $\pi(100) = 25$ ; на отрезке  $[1; 10^6]$   $\pi(10^6) = 78\,498$  простых чисел и т. д.

После Евклида (III в. до н. э.), доказавшего изящным строгим рассуждением, что в последовательности простых чисел нет наибольшего, стало ясным, что  $\pi(n)$  неограниченно возрастает с возрастанием  $n$ ; но по какому же закону? Век следовал за веком, и только П. Л. Чебышеву удалось первым «прорубить окно» в таинственную и казавшуюся неприступной область теории распределения простых чисел. С большим остроумием и глубиной анализа он доказал, что при достаточно больших значениях  $n$  истинное значение  $\pi(n)$  находится вблизи числа  $\frac{1,1n}{\ln n}$ ,

точнее,  $0,92 < \frac{\pi(n)}{n/\ln n} < 1,06$  — *неравенство Чебышева*. Более того, средствами, продолжающими по существу идеи Чебышева, опирающимися на его неравенство, оказалось возможным доказать предельное соот-

ношение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln n} = 1$  почти через 100 лет после того, как это утверждение было высказано Чебышевым (в 1849 году), но полностью им не обосновано.

Любопытные, но и поучительные получаются картинки распределения простых чисел, если натуральные числа размещать последовательно в узлах квадратной сетки, двигаясь от узла к узлу по спирали. Например, начиная спираль с числа 17, можно наблюдать, как одна общая диагональ постепенно формирующихся квадратов сплошь покрывается простыми числами:



Открытие Чебышева наряду с другими теоремами «теории чисел» сами математики называют жемчужинами. Одна из лучших научно-популярных книг по основам теории чисел, написанная выдающимся советским математиком А. Я. Хинчиным, так и озаглавлена «Три жемчужины теории чисел». Такой жемчужиной, истинным украшением теории распределения простых чисел, является и высказывание о том, что

между натуральными числами  $n$  и  $2n - 2$  при  $n > 3$  всегда есть хотя бы одно простое число.

Не найдя доказательства этому утверждению, французский математик, член Парижской академии наук Ж. Л. Бертран высказал его лишь как предположительное («постулат Бертрана»). И только в мемуаре «О простых числах» этот постулат обратился в теорему, красиво доказанную автором мемуара П. Л. Чебышевым (в 1852 году).

Знаменитый русский поэт Валерий Брюсов полагал, что

Смысл — там, где змеи интеграла

Меж цифр и букв, меж  $d$  и  $f$ .

Там — власть, там — творческие горны!

Пред волей цифр мы все — рабы.

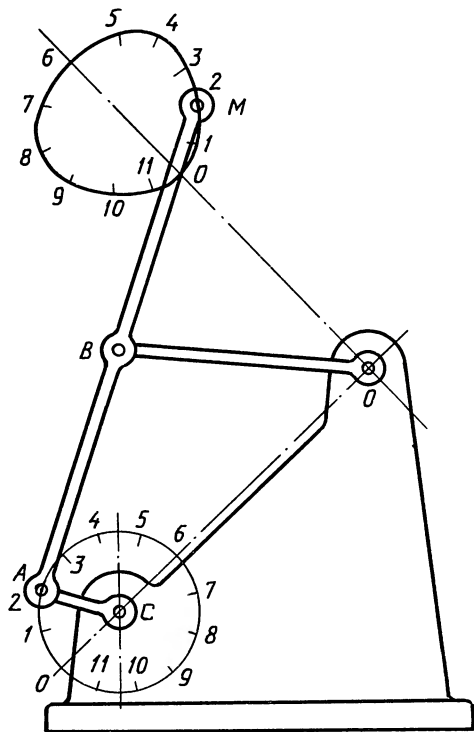
Вот уж не прав Брюсов в последней фразе! Ведь даже такие упрямцы, как простые числа, упорно не желающие делиться ни на какое целое число, кроме единицы и себя, как видим, покорились воле и уму П. Л. Чебышева.

Работы П. Л. Чебышева по теории чисел выдвинули его в первые ряды величайших математиков XIX века и положили начало новому научному направлению в этой области, получившему название Петербургская школа теории чисел.

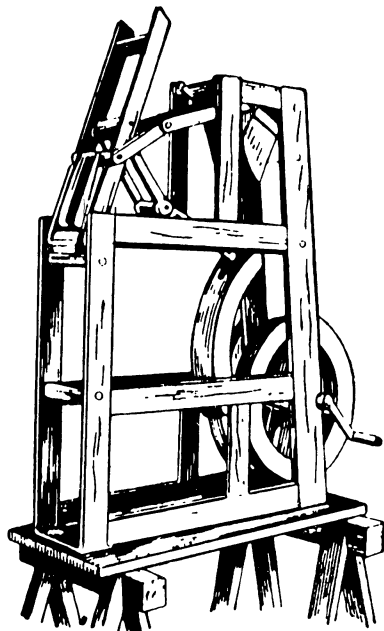
## Пионер научного машиноведения

Другим, после математики, увлечением П. Л. Чебышева с детства и до конца жизни было конструирование механизмов собственного изобретения. В детстве Пафнутий Львович хромал немного и потому не мог участвовать в подвижных играх, что, в свою очередь, давало ему время для любимого занятия — собственноручно мастерить игрушки и разного рода шарнирно-рычажные механизмы, преобразующие круговое движение в прямолинейное. И впоследствии ни научная работа, ни тридцатипятилетняя педагогическая и общественная деятельность не заглушили это увлечение. Своими руками он построил 40 действующих моделей шарнирных механизмов, в том числе модели: одноцилиндровой паровой машины, центробежного регулятора, самокатного кресла, гребного автомата, повторяющего движения весел в лодке, автоматического арифмометра и даже «лошади» — машины, подражающей движению животного при ходьбе.

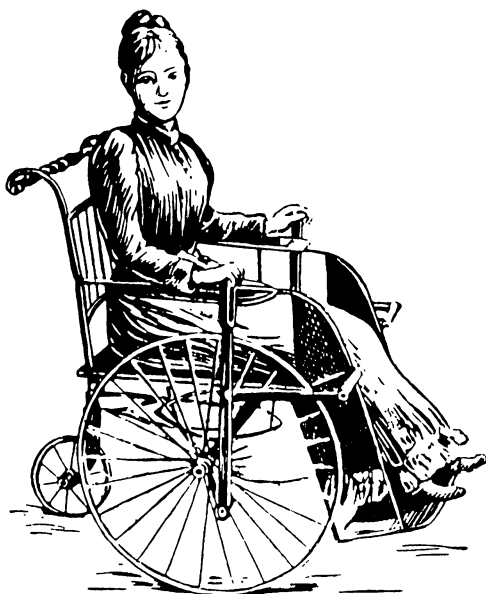
П. Л. Чебышев не только мастерил механизмы, но, описывая их



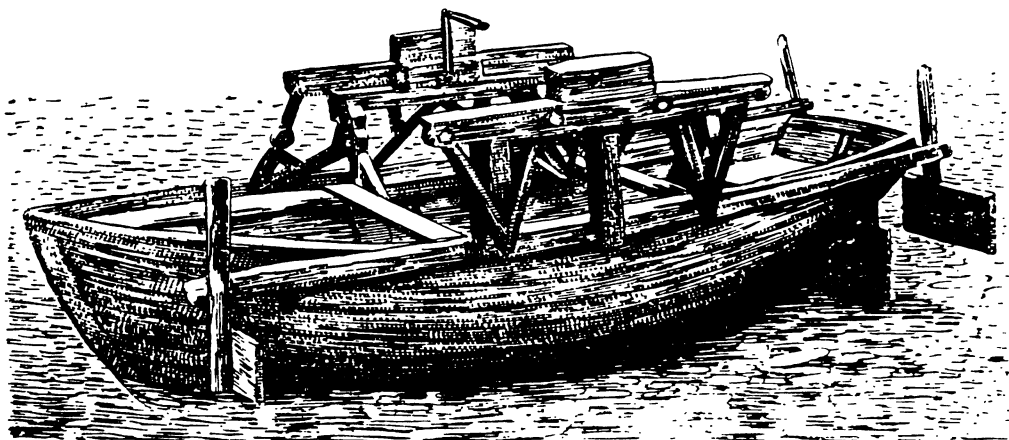
Механизм, который П. Л. Чебышев использовал при конструировании самокатного кресла. Если перемещать точку  $M$  по ее траектории, кривошип  $AC$  будет делать полный оборот.



Сортировалька П. Л. Чебышева



Дамский велосипед — самокатное кресло



Лодка, снабженная гребным механизмом П. Л. Чебышева

устройство в своих мемуарах, первым в мире разрабатывал математические основы общей механики машин, которая до него была чисто описательной наукой. Предложенные им математические методы отыскания оптимальных параметров каждо-

го механизма и их сочетаний оказались настолько общими, что с их помощью решаются задачи оптимального проектирования даже современных механических устройств и приборов.

— В старину математические за-

дачи задавали Боги,— пошучивал П. Л. Чебышев,— например, удвоение куба, по поводу изменения Дельфийского жертвенника. Далее наступил второй период, когда задачи задавали полубоги: Ньютон, Эйлер, Лагранж. Теперь третий период, когда задачи задает практика.

— Но,— уточнял австрийский физик Л. Больцман,— нет ничего более практичного, чем хорошая теория.

## Приручение случайности

С самого начала научной деятельности П. Л. Чебышева в круг его интересов входила теория вероятностей — наука, разрабатывающая математические средства исследования закономерностей, проявляющихся в массе случайных событий, случайных величин, случайных процессов реального мира.

Слава случаю. Разве не случай  
С непреложным всегда наравне...

Случай часто событием правит,  
Порождает и радость, и боль.

И задачу пред нами жизнь ставит:  
Как постигнуть случайности роль?

Понятия, определения, теоремы и даже формулы теории вероятностей очень специфичны, и ограничительные рамки текста одного нашего устного рассказа слишком тесны для обстоятельного изложения сущности и значимости научных результатов П. Л. Чебышева, вошедших во всемирные учебники по теории вероятностей как теорема Чебышева, неравенства Чебышева. Более того, «можно сказать, что именно он создал теорию вероятностей как науку» (академик Ю. В. Линник), создал русскую школу теории вероятностей и «вывел ее на первое место в мире» (академик А. Н. Кол-

могоров). С той поры и на протяжении всего XX века наиболее значительные результаты в теоретико-вероятностных исследованиях принадлежат русским ученым-математикам.

## Торжество «минимакса»

«Минимаксное» решение задачи — это, например, основанный на расчетах выбор такого плана из многих возможных, при котором на заданном отрезке времени *максимальное* расхождение между заданием и реальным его выполнением было бы *минимальным*. Или сложную функцию, характеризующую исследуемый реальный процесс, заменяем более простыми функциями, например многочленами вида

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

имеющими наименьший возможный максимум на отрезке  $[-1; 1]$ , иначе говоря, многочленами, наименее уклоняющимися от нуля (многочленами Чебышева). Идея минимаксного решения задач, впервые введенная в науку Чебышевым в его «теории наилучшего приближения функций», получила дальнейшее развитие в современных работах по теории управления, математической статистике, эконометрике, программировании на ЭВМ и т. д.

**Жизнь  
украшается двумя вещами:  
занятием математикой и ее  
преподаванием (Пуассон)**

В 1874 году П. Л. Чебышев близко знакомится с С. В. Ковалевской, вернувшейся на родину после шестилетнего пребывания за границей, высоко оценивает ее мате-



матическое дарование, оказывает ей авторитетную поддержку. По его предложению, поддержанному другими академиками, доктор математики, профессор Стокгольмского университета С. В. Ковалевская была избрана членом-корреспондентом Российской академии наук. Впервые в России — женщине такая почесть!

П. Л. Чебышев умер 8 декабря 1894 года. Его прах покоится в склепе под колокольной в селе Спас-Прогнань, в 90 км от Москвы.

Велика заслуга П. Л. Чебышева в его многолетней деятельности по методическому усовершенствованию преподавания математики в университетах и средних школах. Участвуя в делах Ученого комитета Министерства народного просвещения, он активно рецензировал учебники по математике, ограждая школу от проникновения плохих учебников.

Он был почетным членом почти всех университетов России и многих иностранных академий наук. Президент Французской академии наук, известный математик Шарль Эрмит назвал П. Л. Чебышева «гордостью науки в России, одним из первых геометров Европы, одним из величайших математиков всех времен», а профессор Стокгольмского университета Миттаг-Лефлер (верный друг и поклонник таланта С. В. Ковалевской) — «гением, обогатившим математические науки своими бессмертными открытиями».

Действительно, гениальный ученый, талантливый изобретатель, выдающийся педагог и деятель народного образования, активный сотрудник Артиллерийского комитета,

Часовню, 47 лет стоявшую над склепом, гитлеровцы разрушили, но склеп, к счастью, не привлек их внимания, может быть, потому, что был тогда наглухо замурован. С 1948 года восстановленные склеп и часовня являются музеем П. Л. Чебышева.

В музее ежегодно бывает много экскурсий.

Памятники П. Л. Чебышеву уста-

новлены в здании Санкт-Петербургского университета и перед зданием МГУ на Ленинских горах.

## Уголок дополнительных сообщений и задач

### Как одно несказанное слово «убило» все простые числа

**Ученик.** Натуральное число  $p > 1$  называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого числа  $p$ .

**Учитель.** Ну и мог бы ты называть хотя бы одно простое число?

**Ученик.** Много чисел могу назвать: 2, 3, 5, 7, 11, ...

**Учитель.** Остановись. У тебя нет оснований считать эти числа простыми. Ведь согласно данному тобой определению число простое, если оно делится только на себя и единицу, но среди натуральных чисел нет таких. Действительно, 7, например, делится не только на 7 и 1, но и на  $-7$  и на  $-1$ , т. е. имеет не 2 делителя, а 4. Получается, что простых чисел и вовсе нет. Ты их уничтожил, пропустив в определении простого числа всего лишь одно слово.

**Задача-вопрос 1.** Какое это слово?

**Задача 2.** Существует ли такое многозначное простое число, все цифры которого имеют общий делитель, больший единицы?

**Задача 3.** Простые числа 3, 5, 7 образуют арифметическую прогрессию с разностью  $d=2$ . Докажите, что другой тройки простых чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью  $d=2$ , нет.

**Задача 4.** Два различных двузначных простых числа 13 и 53 написаны одно за другим: 1353 или 5313. Образовавшиеся числа делятся на полусумму заданных про-

стых чисел, например:

$$1353 : \frac{13+53}{2} = 41.$$

Найдите все пары двузначных простых чисел с таким свойством.

**Задача 5.** Известно, что простые числа располагаются в натуральном ряду весьма неравномерно. Найдется ли промежуток в 2000 следующих друг за другом натуральных чисел, среди которых не было бы ни одного простого?

**Задача 6.** Напишите в строку подряд первые 10 простых чисел — получится шестнадцатизначное число. Теперь вычеркните 10 цифр так, чтобы из оставшихся шести цифр без нарушения порядка их следования образовалось бы наибольшее возможное число.

**Задача 7.** Ящик заполнен одинаковыми коробками, а коробки — кнопками. Сколько всего коробок в ящике, если кнопок в нем 3737, причем известно, что коробок меньше, чем кнопок в каждой коробке?

**Задача 8.** Количество натуральных чисел, меньших  $x$  и взаимно простых с  $x$  (т. е. не имеющих с  $x$  общих натуральных делителей, отличных от 1), называют *функцией Эйлера* натурального числа  $x$  (см. с. 25). Найдите значение этой функции для  $x=26$ .

**Задача 9.** Докажите, что число  $1+64^{2001}$  составное.

**Задача 10.** Простое число 37 397 обладает забавным свойством: отбрасывая в его записи по одной цифре справа, всякий раз будем получать простые числа: 3739, 373,

37, 3. По таблице простых чисел найдите четырехзначные числа с таким же свойством.

**Задача 11.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$  и  $(k-1)!+1$  делится на  $k$ , тогда  $k$  — простое число. Докажите!

**Задача 12.** Даны два натуральных числа, все цифры которых — единицы. В одном  $m$  единиц, в другом  $n$  единиц:

$$N_m = \underbrace{11 \dots 1}_{m \text{ единиц}} \quad N_n = \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ единиц}}$$

Известно, что  $N_m$  и  $N_n$  — взаимно простые числа. Докажите, что в таком случае  $m$  и  $n$  также взаимно простые числа.

**Задача 13.** Сформируйте пятизначные числа, начинающиеся с цифры 2, так, чтобы все двузначные числа, образованные двумя соседними цифрами, были простыми и различными. Например, из цифр числа 23731 образуются простые числа 23, 37, 73, 31. Кто сформирует больше требуемых чисел за некоторое отведенное время?

**Задача 14.** У каких прямоугольников площадь выражается числом, имеющим ровно три натуральных делителя?

### Совершенные числа

Натуральное число  $n$  называется *совершенным*, если сумма всех его положительных делителей, отличных от самого  $n$ , в точности равна  $n$ . Такие числа рассматривал еще Евклид.

Наименьшее совершенное число 6 — оно делится на 1, 2, 3, а  $1+2+3=6$ .

Следующее совершенное число 28 — делится на 1, 2, 4, 7, 14 и  $1+2+4+7+14=28$ .

**Задача 15.** Докажите, что число Евклида  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ , где  $p$  и  $2^p - 1$  — простые числа, является совершенным.

### 0 делится на 0 — верно ли? Верно!

В математическую викторину часто включают такой вопрос:

Какое число делится на все числа без остатка?

Отвечают: 0. Совершенно правильный ответ — ноль делится на любое число и ноль на ноль также делится.

Но ведь на ноль делить нельзя! Тоже правильно!

Что же получается: на ноль делить нельзя, но ноль делится на 0?

Не противоречат ли друг другу эти утверждения, оба признаваемые верными?

А может, здесь неточность вдруг Допущена в точнейшей из наук?

Противоречия или какой-то неточности здесь нет. Наоборот.

Точность математики — это, помимо прочего, точность, четкость определений. Так вот, по определению целое число  $a$  делится на целое число  $b$ , если существует хотя бы одно целое число  $c$ , такое, что  $a = bc$ . В определении делимости не предусматривается сама операция деления как действие, результатом которого должно быть непременно только одно число, т. е. если  $a:b=c$ , то  $c$  — единственное число, такое, что  $a = bc$ .

Значит, в решении вопроса о делимости  $a$  на  $b$  (записывается:  $a:b$  или  $b \backslash a$  — « $b$  делит  $a$ ») допускается существование, может быть, нескольких целых чисел  $c$ , таких, что  $a = bc$ . Поэтому так как равенство  $0 = 0 \cdot c$  справедливо для любого  $c$  (например,  $0 = 0 \cdot 5$ ), то на основании определения такого отношения чисел ( $a$  не действия), которое называется делимостью, заключаем, что 0 делится на 0, т. е.  $0:0$ , но действие  $0:0$  неосуществимо,

так как здесь невозможен единственный результат.

**Задача-вопрос 16.** Имеют ли один и тот же смысл записи:

- 1)  $(a+b):c$  и  $a+b:c$ ;
- 2)  $(a+b):c$  и  $a+b:c?$

### Поэтический курьез в математике

Существует ли число, которое не делится ни на какое число?

Вы, конечно, скажете: «Нет». А у поэта другой ответ:

Какое-то дьявольское число,  
не делимое ни на какое число...  
Это... мое страдание.

(Перуир Севак (1924—1971), стихотворение «Заглавия в конце». По словам литературоведов, книга его стихов «Да будет свет» находится в вершине «треугольника его геометрической поэзии».)

### Красивые «изваяния» чисел вида $ab^n + cn + d$

Здесь  $a, b, c, d$  — целые числа,  
 $n$  — натуральное.

Три модели:

- 1)  $36 \cdot 9^n + 32 \cdot n - 36$ ;
- 2)  $10^n + 18 \cdot n - 1$ ;
- 3)  $4 \cdot 6^n + 5 \cdot n - 4$ .

В чем их красота?

Пожалуйста, при любом значении  $n \in \mathbb{N}$ :

- 1)  $:64$ ; 2)  $:27$ ; 3)  $:25$ .

Более того, на те же числа делятся соответствующие значения  $c^2$ , а именно  $32^2:64$ ,  $18^2:27$ ,  $5^2:25$ .

Пользуясь калькулятором, вы легко проверите справедливость высказанного утверждения, полагая  $n=1, 2, \dots$ , — осячки не будет.

Разумеется, строгое доказательство предпочтительнее. Пусть это будет

**Задача 17.** Требуемое доказательство легко осуществит тот, кто

знаком с принципом математической индукции.

А пока поупражняйтесь в самостоятельном «вылепливании» аналогичных трехчленных «фигурок», подбирая значения  $a, b, c, d$  и делителя  $m \in \mathbb{N}$  ( $m > 1$ ), исходя из того, что трехчлен  $ab^n + c \cdot n + d$  делится на  $m$  тогда и только тогда, когда

$$a+d:m, (b-1) \cdot c:m, \\ a(b-1) + c:m.$$

При этом  $c$  должно быть таким, чтобы  $c^2:m$ . Экономен, например, такой алгоритм подбора: 1) назначить произвольное натуральное значение  $m$  (пусть, например,  $m=14$ ); 2) подобрать  $c$ , кратное  $m$  (например,  $c=28$ ); 3) назначить произвольное значение для  $a$  (например,  $a=3$ ); 4) подобрать значение  $b$ , зная, что  $a \cdot (b-1) + c:m$  (например, требованию  $3 \cdot (b-1) + 28:14$  удовлетворяет  $b=15$ ); 5) подобрать  $d$ , зная, что  $a+d:m$  (в нашем примере можно положить  $d=11$ , тогда  $3+11:14$ ). Изготовление трехчленной «фигурки» закончено:  $3 \cdot 15^n + 28 \cdot n + 11$  делится на 14 при любом значении  $n \in \mathbb{N}$ .

**Задача 18.** Известно, что при любом  $n \in \mathbb{N}$   $b^n + c \cdot n + d:9$ . Найдите общий вид целого числа  $d$ , если  $b=4, c=15$ ; целого числа  $c$ , если  $b=4, d=8$ ; целого числа  $b$ , если  $c=15, d=8$ .

**Задача 19.** Подберите значения  $a, b, c, d$  так, чтобы  $ab^n + c \cdot n + d$  делилось на 1980 при любом  $n \in \mathbb{N}$ . Составьте программу для решения этой задачи на ЭВМ.

### Мечта, еще не ставшая реальностью

В семействе пифагоровых троек  $(a, b, c)$  есть порожденные треугольниками, у которых длины од-

ного катета и гипотенузы выражаются простыми числами  $(q, b, p)$ ,  $q, p$  — простые, например  $(5, 12, 13)$ ,  $(11, 60, 61)$ , ...

В этом случае  $p^2 = q^2 + b^2$  или  $(p-b)(p+b) = q^2$ . Если  $p-b=1$ , то  $p+b=q^2$ , откуда  $2p = q^2 + 1$ . С другой стороны, если  $2p = q^2 + 1$ , то  $p^2 = q^2 + (p-1)^2$ . Таким образом, все пифагоровы тройки вида  $(q, b, p)$  являются решением уравнения  $2p = q^2 + 1$  в простых числах  $p$  и  $q$ . Два решения этого уравнения приведены выше ( $2 \cdot 13 = 5^2 + 1$ ;  $2 \cdot 61 = 11^2 + 1$ ).

Мечту математиков установить, конечно или бесконечно множество решений этого уравнения, никому до сих пор реализовать не удалось.

С пифагоровыми тройками связано и немало курьезов. Например, такой: некоторые пифагоровы тройки превращаются в другие пифагоровы тройки в результате простого приписывания цифры 1, или 2, или 3, ..., или 7 слева к каждому числу тройки. Так, например, при помощи приписывания цифры 1 пифагорова тройка  $(5, 12, 13)$  превращается в пифагорову тройку  $(15, 112, 113)$ .

В качестве домашнего развлечения найдите другие примеры. Кто найдет больше?

$$V_n = \frac{1}{2} ((a+\beta)(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta})^{n-1} +$$

где

$$\gamma = (b - \alpha\alpha) : \sqrt{\alpha^2 + \beta}$$

и

$$\alpha^2 + \beta \neq 0.$$

**Задача 20.** Какой вид принимает формула (3) для  $n$ -го члена последовательности Фибоначчи?

Если параметры  $a, b, \alpha, \beta$  в формуле (1) заменить не числами, а некоторыми многочленами, то получим последовательность функций, общий член которой определяется

Математик Сантало доказал, что существует бесчисленное множество пифагоровых троек, обладающих указанным свойством.

### Возвратные последовательности и многочлены Чебышева

Пусть в последовательности  $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$  заданы первые два члена, а каждый следующий член определяется через предшествующие два. Такая последовательность называется *возвратной (рекуррентной) последовательностью 2-го порядка*.

**Пример:**

$$V_1 = a, V_2 = b,$$

$$V_{n+2} = 2\alpha V_{n+1} + \beta V_n, \quad (1)$$

$a, b, \alpha, \beta$  — заданные числа. Если  $a = b = 2\alpha = \beta = 1$ , то  $V_1 = V_2 = 1$ ,  $V_{n+2} = V_{n+1} + V_n$  — получилась *последовательность Фибоначчи*:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \quad (2)$$

Формула, выражающая  $n$ -й член последовательности, удовлетворяющей условиям (1), непосредственно через параметры  $a, b, \alpha$  и  $\beta$ , очень громоздка. Все же приведем ее без доказательства:

$$+ (a - \gamma)(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta})^{n-1}), \quad (3)$$

той же формулой (3). Так, при  $a = x$ ,  $b = 2x^2 - 1$ ,  $\alpha = x$ ,  $\beta = -1$  получается последовательность многочленов Чебышева (первого рода), общий член которой обозначают  $T_n(x)$ . Убедитесь самостоятельно в том, что эта замена преобразует формулу (3) к виду

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}. \quad (4)$$

Здесь подразумевается, что  $|x| \geq 1$ . Однако при конкретных значениях  $n=1, 2, 3, \dots$  квадратные корни исчезают и получается последовательность многочленов Чебышева  $T_1(x), T_2(x), \dots$ , каждый из которых определен на всей числовой прямой.

Первые три многочлена Чебышева первого рода таковы:

$$T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) = 2^2x^3 - 3x.$$

З а д а ч а 21. а) Какой вид имеют многочлены  $T_4(x)$  и  $T_5(x)$ ?

б) Убедитесь в том, что при любом  $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n.$$

Аналогично при  $a=2x$ ,  $b=4x^2-1$ ,  $\alpha=x$  и  $\beta=-1$  формула (3) определяет общий вид  $n$ -го члена последовательности многочленов Чебышева второго рода, обозначают который через  $U_n(x)$ .

З а д а ч а 22. Убедитесь в том, что многочлены Чебышева первого и второго рода связаны между собой соотношениями (при  $n \geq 1$ ):

$$T'_{n+1}(x) = (n+1)U_n(x),$$

$$2T_n(x) = \frac{U_{2n-1}(x)}{U_{n-1}(x)}.$$

З а д а ч а 23. Решите числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{Л Ш Ч Б} : \quad \text{Ы Ш} = \quad \text{Ч В} \\ \quad \quad \quad \times \quad \quad \quad + \\ \text{Е Л Е} + \text{Л А} = \text{Е Е П} \\ \hline \text{Л Е Л Л} - \text{В Ы Ч} = \text{Е Ы В} \end{array}$$

Расставьте буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр; заменив А на Е, получите инициалы и фамилию русского математика.

### Полезные «сравнения»

Пусть целые числа  $a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на

целое число  $m \neq 0$ , тогда  $a$  и  $b$  называют *сравнимыми* (можно назвать даже равными) по модулю  $m$  и записывают так:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Пр и м е р ы:  $101 \equiv 6 \pmod{5}$ , но  $13 \not\equiv 6 \pmod{5}$ , т. е. 13 не сравнимо с числом 6 по модулю 5.

В частности, если  $a$  делится на  $m$  с остатком  $r$ , то

$$a \equiv r \pmod{m}.$$

Сразу же возникают любопытные и полезные для решения некоторых задач формулы сравнений по модулю. Нетрудно убедиться в том, что, например,

а) если  $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$  и

$$a_2 \equiv b_2 \pmod{m},$$

то  $a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2 \pmod{m}$  и

$$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m},$$

а также и в том, как бедны остатками кубы любых целых чисел при делении на 7 или на 9. В том и другом случаях остатками бывают только 0, или 1, или  $-1$ . Короче,

б)  $N^3 \equiv 0$ , или  $N^3 \equiv 1$ , или  $N^3 \equiv -1$  как по mod 7 так и по mod 9.

Требуется, положим, доказать, что не существует целых значений  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих уравнению

$$15x^3 - 13y^3 = 115. \quad (1)$$

Рассуждаем так: пусть уравнение (1) имеет целочисленное решение  $(x_0, y_0)$ , тогда  $15x_0^3 - 13y_0^3$  и 115 — равные числа. Значит, и остатки от деления этих чисел на любое целое  $m \neq 0$  должны быть одинаковыми, т. е.  $15x_0^3 - 13y_0^3 \equiv 115 \pmod{m}$  по любому модулю  $m$ . Теперь ясно: чтобы доказать, что уравнение (1) не имеет целочисленных решений, достаточно показать, что хотя бы по одному



какому-то модулю  $m_0$   $15x^3 - 13y^3$  не сравнимо с числом 115 при любых целых значениях  $x$  и  $y$ .

Учитывая формулы а) и б), попытаем в качестве модуля  $m_1=7$ . Так как по модулю 7  $15 \equiv 1$ ,  $13 \equiv -1$  и  $115 \equiv 3$ , то в случаях  $x^3 \equiv 0$ , а  $y^3 \equiv 0$ , или  $y^3 \equiv 1$ , или  $y^3 \equiv -1 \pmod{7}$  имеем:

$$15x^3 - 13y^3 \equiv 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 0 \\ \pmod{7} \not\equiv 115 \pmod{7},$$

или

$$15x^3 - 13y^3 \equiv 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ \pmod{7} \not\equiv 115 \pmod{7},$$

или

$$15x^3 - 13y^3 \equiv 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \\ \pmod{7} \not\equiv 115 \pmod{7}.$$

Аналогично в случаях  $x^3 \equiv 1 \pmod{7}$ , а  $y^3 \equiv 0$ , или  $y^3 \equiv 1$ , или  $y^3 \equiv -1 \pmod{7}$  имеем  $15x^3 - 13y^3 \not\equiv 115 \pmod{7}$  и, наконец, в случаях  $x^3 \equiv -1 \pmod{7}$ , а  $y^3 \equiv 0$ , или  $y^3 \equiv 1$ , или  $y^3 \equiv -1 \pmod{7}$  имеем  $15x^3 - 13y^3 \not\equiv 115 \pmod{7}$ .

Так, испытав все комбинации остатков деления на 7, мы установили, что по модулю 7 не сравнимы числа  $15x^3 - 13y^3$  и 115 для любых целочисленных значений  $x$ ,  $y$ , и тем самым доказали справедливость высказанного утверждения (1).

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Числа 2, 3, 5, 7, ... обретут законное право называться простыми при правильном определении:

Натуральное число  $p > 1$  называется простым, если у него нет других натуральных делителей, кроме единицы и самого числа. Если же  $p = p_1 \cdot p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — отличные от единицы натуральные числа, то  $p$  называется составным.

2. Нет. Если бы все его цифры имели общий делитель, то на него делилось бы и само это число.

3. Одно из трех чисел  $p$ ,  $p+2$ ,  $p+4$  непременно делится на 3:

4. Пусть  $(p; q)$  — пара двузначных простых чисел, таких, что  $100p+q$  и  $100q+p$  делятся на  $\frac{p+q}{2}$ . Тогда

$$200p+2q \text{ и } 200q+2p$$

делятся на  $p+q$ . Так как

$$100p+q=99p+(p+q)$$

и

$$200p+2q=198p+2(p+q),$$

то либо 99, либо 198 делится на  $p+q$ , причем  $p+q$  всегда четное число и, значит, является делителем числа 198, а не 99. Четные делители числа 198: 2, 6, 18, 22, 66. В качестве возможной суммы  $p+q$  пригоден только делитель 66. А условию  $p+q=66$  удовлетворяют только 4 пары двузначных простых чисел: 13 и 53, 19 и 47, 23 и 43, 29 и 37. Они образуют 8 четырехзначных чисел, каждое из которых делится на сумму простых чисел, его образующих.

5. Найдется. Таким промежутком будет, например, участок, содержащий 2000 последовательных натуральных чисел вида

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2000 \cdot 2001 + k,$$

где  $k=2, 3, 4, \dots, 2001$ . Ни одно из этих двух тысяч чисел не является простым, так как каждое делится на соответствующее значение  $k$ .

6. После вычеркивания десяти цифр должно получиться число 792 329.

7.  $3737=37 \cdot 101$  — оба множителя простые. Теперь ответ очевиден: коробок 37, а кнопок в каждой коробке 101.

8. Есть 12 натуральных чисел (1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25), меньших числа 26 и взаимно простых с ним. Значит, для  $x=26$  значением функции Эйлера является число 12.

$$\begin{aligned} 9. \quad 1+64^{2001} &= 1^3 + (4^{2001})^3 = \\ &= (1+4^{2001}) \cdot (1-4^{2001}+4^{4002}). \end{aligned}$$

Так как исследуемое число представлено произведением двух натуральных чисел, отличных от 1, то оно составное.

10. Например, 5939, 3119, 3797 и др.

11. Предположим, что  $k$  составное. Тогда  $k$  делится на некоторое число  $m$ , такое, что  $1 < m < k$ . Но тогда  $(k-1)!$  делится на  $m$ , следовательно, и 1 делится на  $m$ , что невозможно. Значит,  $k$  — число простое.

12. Число  $N_m$ , все  $m$  цифр которого единицы, запишем в виде

$$\begin{aligned} N_m &= 10^{m-1} + 10^{m-2} + \dots + 10^1 + 1 = \\ &= \frac{1}{9} (10^m - 1). \end{aligned}$$

Докажем сначала, что это число обладает следующим свойством: если  $m$  делится на  $d$  ( $m$  и  $d$  — натуральные числа), то  $N_m$  делится на  $N_d$ . Действительно, если  $m = k \cdot d$  ( $k$  — натуральное число), то

$$N_m = N_{k \cdot d} = \frac{1}{9} ((10^d)^k - 1) = \frac{1}{9} (10^d - 1) (10^{kd-d} + 10^{kd-2d} + \dots + 10^d + 1) = N_d \cdot M,$$

где  $M$  — целое число. Из этого свойства непосредственно следует, что если  $d$  — общий натуральный делитель чисел  $m$  и  $n$ , то  $N_d$  — общий делитель чисел  $N_m$  и  $N_n$ . А это значит, в свою очередь, что если  $N_m$  и  $N_n$  — взаимно простые числа, то  $m$  и  $n$  также взаимно просты.

13. Максимальное количество требуемых чисел 20: 23 113, 23 117, 23 119, 23 137, 23 171, 23 173, 23 179, 23 197, 23 711, 23 713, 23 717, 23 719, 23 731, 23 797, 29 711, 29 713, 29 717, 29 719, 29 731, 29 737.

14. Площадь любого квадрата, длина стороны которого простое число  $p$ .

15. Выпишем все делители числа  $n = 2^{p-1} \cdot r$  ( $r = 2^p - 1$  — простое число), которые меньше его самого:

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{p-2}, 2^{p-1}, \\ r, 2r, 2^2r, \dots, 2^{p-2} \cdot r.$$

Числа как первой строки, так и второй образуют геометрические прогрессии. Вычисляя их суммы, находим:

$$S_1 = 2^p - 1 = r, \quad S_2 = r \cdot 2^{p-1} - r, \\ S_1 + S_2 = \zeta + r \cdot 2^{p-1} - r = r \cdot 2^{p-1} = n.$$

Таким образом, сумма всех делителей числа  $n$ , меньших  $n$ , равна  $n$ , и, следовательно, число Евклида совершенное.

Число Евклида является общим видом всех возможных четных совершенных чисел, но до сих пор остаются нерешенными вопросы:

а) конечно или бесконечно множество совершенных чисел;

б) существуют ли нечетные совершенные числа?

16. 1) Да: сумма  $a+b$  делится на  $c$ .  
2) Нет.

17. Докажем в общем виде, что если число  $M_n = ab^n + cn + d$  делится на  $m$  при любом целом неотрицательном  $n$ , то

$$a + d; m \quad (1), \quad (b-1) \cdot c; m, \quad (2)$$

$$a(b-1) + c; m. \quad (3)$$

В самом деле, по условию  $M_0$  (при  $n=0$ ) делится на  $m$ , но  $M_0 = a + d$ , значит, доказано (1). При  $n=1$  имеем:

$$M_1 = a \cdot b + c + d = a(b-1) + c + (a+d).$$

Так как  $M_1; m$  и  $a + d; m$ , то

$$a(b-1) + c; m,$$

значит, доказано (3). При  $n=2$  и  $n=3$  имеем:

$$M_2 = a \cdot b^2 + 2c + d, \quad M_3 = a \cdot b^3 + 3c + d.$$

Составим выражение:

$$T = b(M_2 - M_1) - (M_3 - M_2).$$

По условию  $M_1; m, M_2; m, M_3; m$ , следовательно,  $T; m$ .

$$T = b(a \cdot b^2 + 2c - ab - c) - \\ - (a \cdot b^3 + 3c - a \cdot b^2 - 2c) = \\ = bc - c = c(b-1); m,$$

значит, доказано (2).

Докажем теперь обратную теорему. Пусть справедливы утверждения (1), (2), (3). Требуется доказать, что в таком случае  $M; m$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ . Имеем:

$$M_0 = a + d; m, \quad M_1 = a(b-1) + c + M_0; m.$$

Предположим, что при некотором  $k \in \mathbb{N}$   $M_k; m$ , и покажем, что  $M_{k+1}; m$ . Для этого рассмотрим разность

$$M_{k+1} - M_1 = b \cdot M_k - k(b-1) \cdot c - b(a+d). (*)$$

Так как  $(b-1) \cdot c; m, a + d; m$  и по предположению  $M_k; m$ , то правая часть равенства (\*) делится на  $m$ . Следовательно, и левая часть этого равенства делится на  $m$ , т. е.  $M_{k+1} - M_1; m$ .

Так как  $M_1; m$ , то заключаем, что и  $M_{k+1}; m$ . Но тогда на основании принципа математической индукции приходим к выводу, что при любом  $n \in \mathbb{N}$  в условиях (1), (2), (3)

$$a \cdot b^n + c \cdot n + d; m.$$

$$18. d = 9k - 1, k \in \mathbb{Z};$$

$$c = 9k - 3, k \in \mathbb{Z};$$

$$b = 9k - 5, k \in \mathbb{Z}.$$

19. Один из возможных наборов:  $a=25, b=67, c=330, d=1955$ .

$$20. V_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

$$21. а) T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

23.

$$1624 : 56 = 29 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 9$$

$$\quad \quad \times \quad + \quad \text{П. Л. Ч Е Б Ы Ш Е В}$$

$$313 + 17 = 330$$

$$1311 - 952 = 359$$

# «ПРИНЦЕССА НАУКИ»

## СОФЬЯ ВАСИЛЬЕВНА КОВАЛЕВСКАЯ



С. В. Ковалевская (1850—1891)

*Я чувствую, что предназначена служить истине — науке и прокладывать новый путь женщинам, потому что это значит служить справедливости. Я очень рада, что родилась женщиной, так как это дает мне возможность одновременно служить истине и справедливости.*

С. В. Ковалевская

### Воробышек расправляет крылышки

Воробышком называли Софью Васильевну Ковалевскую ее родные за маленький рост и худощавенькую фигуру, когда она еще была девочкой — Софой Корвин-Круковской. Родилась она в Москве 15 января 1850 года.

Отец Софы — крупноместный дворянин, артиллерийский генерал.

Его род идет от польского витязя Круковского и дочери венгерского короля-рыцаря Матея, мецената и библиофила. Корвин — его прозвище. Выйдя в отставку, генерал переехал с семьей из Москвы в свое имение Палибино (современное название — Полибино) недалеко от границы с Литвой.

Софе тогда было около шести лет. А в те годы девочкам даже из дворянских и помещичьих семей была предуготована неполноправная участь. Конечно, Софа должна быть обучена музыке и литературе, истории, языкам и математике, но не в школе, а дома — в одиночку. И — самое несправедливое — без реальной возможности продолжить образование в высшей школе, двери которой помещичье-дворянский государственный строй наглухо закрыл для всех женщин России.

Жизнерадостная девочка с круглым и необыкновенно выразительным лицом, с ямочкой на подбородке и глазами, то блестящими и искрящимися, то глубоко мечтательными, училась усердно, настойчиво и самостоятельно осмысливая все, что изучала. Рано пристрастившись к чтению, сначала она увлеклась поэзией. Размер строк из «Мцыри», «Кавказского пленника» производил на нее чарующее действие. В свои 12 лет она твердо решила стать поэтессой.

Тем временем с возрастающей силой и скоростью стало у Софы проявляться математическое дарование.



Дом в Палибино после реконструкции

...Однажды генерал спросил дочь, любит ли она арифметику.

— Нет, папа,— чистосердечно ответила девочка.

Но искра интереса быстро разгорелась, и через четыре месяца на тот же вопрос отца с такой же искренностью она ответила:

— Да, папочка, я люблю заниматься арифметикой, она доставляет мне удовольствие...

Проходя раздел об отношении длины окружности к длине диаметра, Софа пришла к правильному выводу самостоятельно и весьма своеобразным путем. А в одном из автобиографических очерков Софья Васильевна вспоминает, как, не зная тригонометрии, но сообразуясь с тригонометрическими формулами, встретившимися в заинтересовавшем ее учебнике алгебры, она попыталась объяснить себе их сама: «При этом по странному совпадению я пошла тем же путем, который употреблялся исторически, т. е. вместо синуса брала хорду».

Действительно, более 1000 лет назад выдающийся среднеазиатский мыслитель-математик аль-Фараби — первый автор теоремы синусов для произвольного треугольника — также полагал, что «синус есть половина хорды удвоенной дуги». Много позже это определение синуса было дополнено словами «...окружности единичного радиуса».

«Многие, которым никогда не представлялось случая узнать более математику, смешивают ее с арифметикой и считают ее наукой сухой. В сущности же это наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего столетия говорит совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи в то же время и поэтом в душе».

*С. В. Ковалевская* (отрывок из ее письма)

## Воробышек вырывается на свободу

К восемнадцати годам у Софы полностью сформировались основные черты характера: настойчивость, целеустремленность; определилось призвание: в науку, в математику! Для девушки ее круга такая цель могла быть реализована только за границей, да и то с преодолением множества препятствий: И прежде всего, предварительно должен быть получен так называемый «вид на жительство» за границей. А девушкам его вообще не давали. Только замужняя женщина могла получить от супруга отдельный «вид на жительство» и полностью распоряжаться собой, разумеется, с согласия мужа, а то ведь «непокорную» могли вернуть с полицией.

И вот некоторые молодые люди соглашались на фиктивный брак с



Софа Корвин-Круковская

девушками, желающими получить образование, выпраивали им самостоятельный «вид на жительство» за границей. Такой маневр пришлось избрать и Софе. Но без согласия отца в брак не вступишь, и жених должен удовлетворять строгим отцовским запросам. Где и как найти подходящего?

Однажды три девушки — Софа, ее старшая сестра Анна и их подруга Жанна — решились сами сделать предложение молодому профессору университета — фиктивно жениться на любой из них. Они были почти незнакомы с профессором, но знали, что он порядочный человек и сочувствует их стремлению к высшему образованию. И вот Анна, Жанна и Софа пришли к профессору домой. Он был немало удивлен подобным визитом, однако принял их любезно.

— Не желаете ли Вы жениться на одной из нас, чтобы можно было поехать за границу учиться? — без лишних слов, напрямик спросила его Анна.

— Не имею ни малейшего желания, — твердо и спокойно ответил профессор.

Отказ не обидел девушек, хотя и ломал их планы. Гости тут же встали и, извинившись, пошли к выходу. Хозяин любезно проводил их до двери.

Пятнадцать лет спустя, уже сама будучи профессором, Софья Васильевна Ковалевская случайно встретила с этим человеком, и они смеясь вспомнили неудавшееся сватовство.

Событие, поворотное в судьбе восемнадцатилетней Софы, все же наступило: в сентябре 1868 года с согласия отца Софы состоялся ее брак с двадцатипятилетним неродовитым, но честным и деликатным соседом по имени — Владимиром

Онуфриевичем Ковалевским, также увлеченным естественными науками. Впоследствии он стал известным специалистом в области палеонтологии.

В письме к своему брату Владимир Онуфриевич написал: «Не смотря на свои восемнадцать лет, воробышек образована великолепно, знает все языки, как свой собственный, и занимается главным образом математикой... Работает, как муравей, с утра до ночи и при всем этом жива, мила и очень хороша собой... такое счастье свалилось на меня. Вообще, это маленький феномен».

После свадьбы молодые Ковалевские уехали в Петербург, а через год — в Германию для совершенствования своих знаний и научной работы.

Отъезд из Палибино, знаменовавший для Софьи Васильевны обретение желанной свободы и самостоятельности, вдохновил ее на следующие строки:

...Но не жалко героине  
Оставлять места родные.  
И не мил ей и не дорог  
Вид родимого селенья.  
Вызывает он в ней только  
Неприязнь и озлобленье.  
Вспоминаются ей годы  
Жизни, страстных порываний,  
И борьбы глухой и тайной,  
И подавленных желаний.  
Перед ней картины рабства  
Вьются мрачной вереницей,  
Рвется вон она из дома  
Словно пленник из темницы.  
Вот теперь пора настала  
Променять мечты на дело,  
И вперед она взирает  
Так уверенно, так смело.  
Не пугает ее вовсе  
Незнакомая дорога.  
В ее сердце много веры  
И надежд в душе так много.

Хотя совместная жизнь Софьи и Владимира Ковалевских началась по обоюдному соглашению с брака фиктивного, их отношения покоились на дружбе и взаимном уважении, а со временем возникла и любовь.

Один из своих стихотворных опусов Софья Васильевна озаглавила так: «Шуточное послание В. О. Ковалевскому». Вот три отдельные строфы из этого послания:

Мой друг! Вот целых две недели ежедневно Тебя я жду и мучаюсь,— но все напрасно! Зову, пишу фольянты, злюсь, но мне  
в ответ  
Ни самого тебя, ни писем твоих нет...

Забыв поваренную книгу, интегралы, Магистерство и Коркина дифференциалы, Я рифмоплетствую, бешусь и каждый час Душою уношусь раз десять на Парнас...

И вот моей я музе поклонилась снова  
И на нее Минерву променять готова.  
Права пословица, как видно, хоть стара,  
Которая гласит: qui a rimé — rimega

(кто писал стихи — будет писать).

Палибино, 1875 г.

В 1878 году у Ковалевских родилась дочь, которую в честь мамы назвали Софьей.

### «С наивысшей похвалой» («*Summa cum laude*»)

Испытание нравственных сил на выносливость продолжалось для Софьи Васильевны Ковалевской и за границей. Ей не разрешили посещать лекции в Берлинском университете под столь знакомым ей предлогом: «Женщин сюда не принимают». Софью Васильевну увлекали задачи, связанные с самой современной теорией специальных функций. И кто же мог бы быть для нее лучшим учителем и наставником, как не





### Вейерштрасс

знаменитый немецкий математик Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс?

Софья Васильевна знала, что профессор живет отшельником; его еще никто и никогда не посмел беспокоить дома, и все же, преодолевая свою постоянную застенчивость, она мужественно направилась на квартиру профессора. Ей было 20 лет. В одном из своих программных стихотворений она писала:

Если ты в жизни хотя на мгновение  
Истину в сердце своем ощутил,

Если луч правды сквозь мрак и  
сомнение

Ярким сияньем твой путь озарил:

Что бы, в решение своем неизменном,

Рок ни назначил тебе впереди,

Память об этом мгновенье священном

Вечно храни, как святыню, в груди.

Тучи сберутся громадой нестройной,

Небо покроется черною мглой —

С ясной решимостью, с верой

спокойной

Бурю ты встреть и померься

с грозой.

Лживые призраки, злые виденья  
Сбить тебя будут пытаться с пути;  
Против всех вражеских козней

спасенье

В собственном сердце ты сможешь  
найти;

Если хранится в нем искра святая,  
Ты всемогущ и всесилен, но знай,

Горе тебе, коль врагам уступая,

Дашь ты похитить ее незначай!

Лучше бы было тебе не родиться,

Лучше бы истины было не знать,

Нежели, зная, от ней отступиться,

Нежели правду на ложь променять.

Ведь грозные боги ревнивы и строги,

Их приговор ясен, решение одно:

С того человека и взыщется много,

Кому было много талантов дано...

Высокий, массивный седовласый профессор, услышав просьбу иностранки разрешить ей посещать его лекции, отрицательно покачал головой. Для такого разрешения требуется получить согласие университетского начальства, но оно ни за что не позволит войти в университетскую аудиторию женщине, да к тому же русской...

Посетительница продолжала настаивать, умолять, мешая от волнения немецкие и французские слова. Профессор ломал голову, как от нее избавиться, и, наконец, нашел выход. Он предложил ей несколько задач по гиперболическим функциям. Если за неделю она сумеет решить их, тогда можно поговорить о дальнейшем. Почтенный профессор выбрал далеко не легкие задачи. Не многие из его самых успевающих студентов сумели бы с ними справиться. Поэтому он был уверен, что странная русская больше не придет... Прошло семь дней. Профессору доложили, что снова пришла русская дама. Софья Васильевна молча протянула тетрадь с решенными задачами. Профессор быстро

проглядел листы, повторяя: «Не может быть! Это невероятно!»

...Каково же было его изумление, когда он убедился, что молоденькая иностранка нашла новые пути решения этих задач, о которых он даже сам не подозревал. А когда Софья Васильевна стала с воодушевлением защищать свои решения, профессор увидел ее темно-каштановые, коротко остриженные волосы, одухотворенное лицо, великопепные сияющие серо-зеленые глаза незаурядно умного, волевого человека и почувствовал к ней симпатию.

Довольно скоро профессор убедился, насколько талантлива эта молодая женщина. С ней он мог говорить о любых проблемах математики и физики... Наконец он сам выразил желание руководить ее занятиями... Ковалевская стала его любимой ученицей.

Пришло и общественное признание. Совет Геттингентского университета, рассмотрев три научные работы, выполненные Софьей Васильевной Ковалевской, признал их выдающимися и присудил ей ученую степень доктора философии по математике и магистра изящных искусств «с наивысшей похвалой».

Словно маленькая девочка радовалась Софья Васильевна, разглядывая диплом в красивом бархатном футляре, подаренном профессором Вейерштрассом.

В очередной раз Софья Ковалевская доказала законное право быть на математическом Олимпе своим блестящим открытием условий существования решения системы уравнений с частными производными. До нее задача нахождения решения такой системы уравнений была рассмотрена французским математиком Коши (задачи Коши), но не всесторонне. Соответствующей

теореме Ковалевская дала исчерпывающее и более простое, чем у Коши, доказательство. Ее исследование вошло в золотой фонд математики под названием «теорема Коши — Ковалевской».

Эта теорема до сих пор находит важные применения в теории уравнений с частными производными, и самые тонкие современные исследования лишь подтверждают ее глубокий и заверченный характер. «Талант Ковалевской вызывает восхищение всех математиков», — отметил ее современник, знаменитый математик Шарль Эрмит.

Вспомним также и слова В. Гюго:

Живые борются, а живы только те  
Чье сердце предано возвышенной  
мечте,  
Кто, цель прекрасную поставив пред  
собою,  
К вершинам доблести идут крутой  
тропою  
И, точно факел свой, в грядущее  
несут  
Великую любовь или священный труд!

## «Принцесса науки»

Такое звание присвоила С. В. Ковалевской стокгольмская газета, сообщившая шведскому народу: «Принцесса науки, г-жа Ковалевская, почтила наш город своим посещением и будет первым приват-доцентом женщиной во всей Швеции».

И вот наступил день 30 января 1884 года.

Бледная, небольшого роста женщина в скромном, без единого украшения платье стоит у доски перед настороженно замершей аудиторией. Ее маленькие, почти детские руки дрожат, и крошки мела падают на черный бархат платья, оставляя на нем белые полосы. Еще мгновение,

и затянувшаяся пауза перейдет в недоуменное молчание. Но женщина нервно глотает застрявший в горле комок, слегка прищуривает глаза и спокойно, неожиданно низким, но мягким голосом произносит:

«Господа, среди всех наук, открывающих человеку путь к познанию законов природы, самая могущественная, самая великая наука — математика». Так начала свою первую лекцию о теории уравнений в частных производных Софья Васильевна Ковалевская, приглашенная в Стокгольмский университет для чтения курса высшей математики.

Два часа пролетели незаметно — настолько увлекательно и ясно, с поэтической теплотой излагала она самые трудные и сухие понятия.

Ковалевская быстро завоевала популярность в Стокгольме. Помимо законной гордости горожан, что у них живет и работает первая в мире знаменитая женщина-математик, она импонировала шведам и как личность. Всех поразило, что за две недели пребывания в Швеции Софья Васильевна овладела шведским разговорным языком. Ее ласково прозвали «наш профессор Соня», а в некоторых семьях новорожденным девочкам стали давать в ее честь имя Софья. За 8 лет Ковалевская

прочитала в Стокгольмском университете 12 курсов по различным разделам математики.

Еще в юности Софья Васильевна задумывалась над проблемой математического описания движения различных точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки — волчка, гироскопа и т. п. До Ковалевской брались за эту задачу два великих математика: Эйлер и Лагранж. Эйлер рассмотрел случай вращения тела вокруг точки опоры, совпадающей с центром тяжести тела (модель на рисунке 71). Лагранж решил задачу о вращении волчка, у которого центр тяжести находится на оси симметрии, но не совпадает с точкой опоры (модель на рисунке 72).

Конечно, математиков всего мира интересовала, манила задача результативного (доведенного до решения) математического описания более общего случая вращения тела вокруг неподвижной точки (модель на рисунке 73), но долгое время никому не поддавалась.

Парижская академия наук уже в третий раз объявляет задачу — «усовершенствовать в каком-нибудь важном пункте теорию движения твердого тела» — темой конкурса на премию. В предыдущих двух слу-

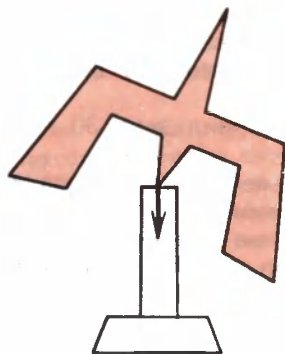


Рис. 71

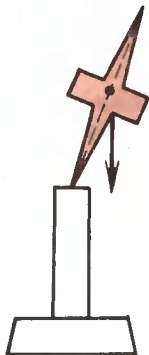


Рис. 72

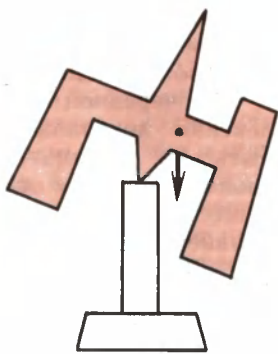


Рис. 73

чаях премия никому не была присуждена.

И вот Софья Васильевна Ковалевская настойчиво ищет и находит (!) путь к решению этой задачи. Она разработала оригинальный подход к решению сложной задачи, имеющей огромное практическое значение (без гироскопических приборов не обходятся ни корабли, ни самолеты, ни ракеты). Свое блестящее обоснованное решение под девизом «Говори, что знаешь, делай, что должен, пусть будет, что может быть» (вариант старофранцузской пословицы) Ковалевская представила на третий конкурс, объявленный Парижской академией наук на 1888 год. Конкурсная комиссия, рассмотрев полтора десятка работ, присудила премию труду С. В. Ковалевской и даже постановила увеличить премию в  $\frac{5}{3}$  раза «вследствие большой важности результатов».

Премия была вручена победительнице в торжественной обстановке 12 декабря 1888 года в Парижской академии наук. В 1988 году этому знаменательному событию исполнилось 100 лет.

Вейерштрасс также был восхищен своеобразием решения, разработанного С. В. Ковалевской, и окончательно утвердился в признании этой русской женщины гениальным математиком.

Известный математик Джеймс Сильвестр, плененный многогранным дарованием Софьи Васильевны, ее бархатным голосом, сочинил в ее честь и опубликовал сонет «Музыка и Математика»:

О, дева, голос чей — самих небес  
творенье  
(тому, кто трудится, найдется ль  
дар ценней!),  
Как смена лун, твое разнообразно  
пенье

И нежно, как слеза тоскующих очей.

Пусть ложный страх, людских  
достоинств всех пороков,  
Порыв твой не смутит, пусть длится  
наша радость —  
Ведь розы аромат, прохладный ветерок  
Нам будут вечно доставлять одну  
лишь сладость...

Позвольте, Вам сплету венок  
гармоний сей!  
Одна мелодией лишь чувства  
нам пленяет,  
Другая же средь цифр немых,  
как Прометей,  
По струнам разума людского ударяет.  
Перевод В. Рыкалова

— Что скажете Вы о таком славословии? — спросил Софью Васильевну ее шведский друг, математик Миттаг-Лефлер.

— То, что всегда говорю: моя слава лишила меня обыкновенного женского счастья. Певица ласкает слух сего поэта, а Прометей в юбке трогает лишь его разум, — печально произнесла Ковалевская.

— А удовлетворились бы Вы этим счастьем, Соня? — с состраданием спросил Миттаг-Лефлер.

— Кто знает? — пожала плечами Софья Васильевна. — Мне судить трудно: у меня его никогда не было... Судьба очень добросовестно позаботилась о том, чтобы мое одиночество было возможно совершеннее...

Добавим к славословию Сильвестра строфу стихотворения поэта Анатолия Поперечного:

Сто птиц надежды ты убила разом  
Из маленького странного ружья.  
О, женщина, поставившая разум  
Превыше глупой страсти бытия...

Всей душой сопереживая трудной борьбе французских коммунаров, Софья и Владимир Ковалевские в

апреле 1871 года приехали в осажденный Париж для участия в помощи по уходу за ранеными коммунарами. Позже Софья Васильевна, как могла, содействовала вызволению из тюрьмы В. Жаклара — известного деятеля Парижской Коммуны.

Вынужденная всю творческую жизнь трудиться на чужбине, Софья Васильевна очень тосковала по родине, по русским людям. Ее страстное желание преподавать отечественным студентам и студенткам так и не осуществилось. Рассказывают, что, когда петербургский чиновник, отказывая С. В. Ковалевской в разрешении преподавать в университете, грубо заявил: «У нас всегда этим занимались мужчины... и не надо нам никаких нововведений», в ответ ему возмущенная Софья Васильевна сказала: «Когда Пифагор открыл свою знаменитую теорему, он принес в жертву богам 100 быков. С тех пор все скоты боятся нового...»

Смерть преждевременно оборвала дальнейшую научную и педагогическую деятельность Ковалевской. В январе 1891 года она по пути из Италии в Швецию простудилась и заболела воспалением легких. Болезнь протекала бурно, с осложнениями, и 10 февраля 1891 года Софья Васильевна Ковалевская скончалась в возрасте 41 года.

Один из ее шведских друзей поэт Франц Лефлер написал стихотворение:

#### **На смерть С. В. Ковалевской**

Душа из пламени и дум!

Пристал ли твой корабль воздушный

К стране, куда парил твой ум,  
Призыву истины послушный?  
В тот звездный мир так часто ты  
На крыльях мысли улеталя,  
Куда уйдя в свои мечты,  
О мирозданьи размышляла...

Заканчивалось стихотворение такими строками:

Прощай! Тебя мы свято чтим,  
Твой прах в могиле оставляя;  
Пусть шведская земля над ним  
Лежит легко, не подавляя...  
Прощай! Со славою твоей  
Ты, навсегда расставшись с нами,  
Жить будешь в памяти людей  
С другими славными умами,  
Покуда чудный звездный свет  
С небес на землю будет литься  
И в сонме блещущих планет  
Кольцо Сатурна не затмится.

Через 5 лет на холме Линдхаген в Стокгольме, где похоронена С. В. Ковалевская, был воздвигнут памятник, средства на который собрали русские женщины.

Словно бы к ней обращаясь, восклицает Ф. И. Тютчев:

Не легкий жребий, не отрадный  
Был вынут для нее судьбой  
И рано с жизнью беспощадной  
Вступила ты в неравный бой.

Президент Академии наук СССР С. И. Вавилов сказал 13 января 1950 года на торжественном заседании, посвященном 100-летию со дня рождения С. В. Ковалевской: «...В истории человечества до Ковалевской не было женщины, равной ей по силе и своеобразию математического таланта».

## Уголок дополнительных сообщений и задач

Город стар, город сед,  
Городу тысяча сто сорок лет.

*Л. Мартынов*

**Задача 1.** Софа Корвин-Круковская прочитала в одной старинной книге описание города, расположенного на десяти островах. В описании говорилось: «С пяти островов переброшено на материк по одному мосту. На четырех островах берут начало по 4 моста, на трех островах берут начало по 3 моста, и на один остров можно пройти только по одному мосту».

Чтобы представить себе карту этого удивительного города, Софа еще раз внимательно прочитала описание и... быстро сообразила, что никаких схем чертить не нужно: описание ошибочное!

Как она рассуждала?

**Задача 2.** Предположим, что средний возраст города определяют следующим образом: складывают возрасты всех домов и полученный результат делят на общее количество домов.

Выясните, отчего больше помолodeет город: оттого, что снесут старый дом, или оттого, что построят новый дом. Для простоты считайте, что можно снести и построить дом за одинаковое время.

Или дробь... Ох эти дроби!

Жизнь, как дробь, и точна,

а — мимо...

*И. Снегова*

**Задача 3.** Двенадцатилетняя Софа любила арифметику, но не стала бы непосредственно перемножать 50 дробей:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \dots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{99}{100},$$

чтобы выяснить, больше или меньше  $\frac{1}{10}$  это произведение. И все же на

поставленный вопрос ответила бы правильно и обоснованно, а не наугад. Как можно было бы действовать?

Как для смертных истина ясна,

Что в треугольник двум тупым

не влиться.

*А. Данте*

**Задача 4.** Это верно, что не может быть треугольника с двумя тупыми углами. Ну, а есть ли тупой угол в треугольнике, длины сторон которого связаны соотношением

$$a^3 + b^3 = c^3?$$

Посредством уравнений, теорем

Он уйму всяких разрешил проблем.

*Д. Чосер*

**Задача 5.** В романе Ильфа и Петрова «Золотой теленок» сформулирована такая задача: «На трех станциях: Воробьево, Грачево и Дроздово — было по равному количеству служащих. На станций Дроздово было комсомольцев в 6 раз меньше, чем на двух других, вместе взятых, а на станции Воробьево партийцев было на 12 человек больше, чем на станции Грачево. Но на этой последней беспартийных было на 6 человек больше, чем на первых двух. Сколько служащих было на каждой станции и какова была там партийная и комсомольская прослойка?»

Результат решения этой задачи не имеет прямого отношения к развитию последующих событий в романе, поэтому читатели, как правило, воспринимают текст этой задачи как литературную шутку-пародию и не задумываются над ее решением. Но, полагаю, Софа Корвин-Круковская — будь она школьницей нашего времени — не скользнула бы равнодушным взглядом по тексту за-

дачи, читая «Золотого теленка», а непременно приступила бы к ее решению. Так поступит и всякий истинный «рыцарь математики».

По смыслу задачи в ней 9 искоемых чисел, но, как легко видеть, условие моделируется системой из пяти линейных уравнений с девятью переменными. И все же она может быть решена на множестве натуральных чисел. Найдите одно-два правдоподобных результата, предполагая, что все искомые числа отличны от нуля и число служащих на каждой станции не очень велико, скажем, не более 25 человек.

**Задача 6.** Иное дело, уравнение

$$\frac{1}{1988} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Сколько (точно) оно имеет решений в целых числах?

Что возможно — это ясно,

Невозможно — почему?

**Задача 7.** Число 1988 можно представить разностью квадратов целых чисел, например, так:

$$1988 = 78^2 - 64^2,$$

а число 1990 — невозможно. Почему?

**Задача 8** (Разговор в учительской школы.)

**Учитель физкультуры.** Я подметил забавное совпадение: сумма цифр числа всех учащихся VI—X классов нашей школы равна 16 и сумма цифр числа девочек в тех же классах равна 16. Как гово-

рится, кругом 16. Что вы скажете по этому поводу?

**Учитель математики.** Только одно: я не подсчитывал, сколько всего мальчиков учится в наших VI—X классах, но, опираясь на ваше наблюдение, скажу уверенно, что вы можете всех мальчиков из этих классов разбить поровну на 9 спортивных команд.

Как обосновал бы это утверждение учитель математики?

Обучая искусству доказывать, не забудем и об искусстве догадываться.

*Д. Поля*

В те годы, когда Софа училась алгебре и геометрии, учеников много упражняли в решении задач на построение с помощью только циркуля и линейки, или только циркуля, или только линейки. Для решения таких задач требовались прочные знания теорем геометрии и почти всегда — проявление догадки, озарение.

Как говорится в одном четверостишии:

Не всегда уравнения  
Разрешают сомнения,  
Но итогом сомненья  
Может быть озаренье.

Софины тетради с решениями задач не сохранились. Но почему бы не быть в них решениями следующих трех красивых задач?

**Задача 9.** На каждой стороне квадрата отметили по одной точке, выбранной произвольно. Стороны

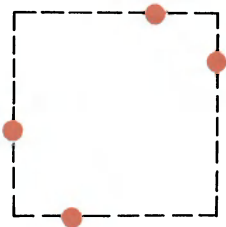


Рис. 74

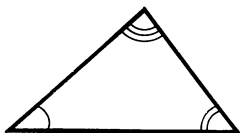


Рис. 75

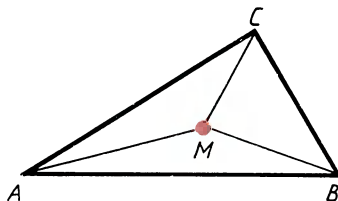


Рис. 76



стерли, а точки остались (рис. 74). Требуется восстановить квадрат, пользуясь только циркулем и линейкой.

**Задача 10.** В другой раз учитель отметил на чистом листе бумаги только две точки и сказал: «Эти концы одной стороны квадрата, т. е. даны две его вершины. Найди остальные две вершины квадрата, пользуясь только циркулем».

**Задача 11.** А однажды было и такое требование: за одну минуту размышлений придумать способ построения трех углов, равных углам начерченного произвольного треугольника (рис. 75), пользуясь только одной линейкой.

Центр тяжести — где он  
В фигуре данной размещен?

Из школьного курса нам известно, что точка пересечения медиан ( $M$ ) треугольника  $ABC$  (рис. 76) делит каждую медиану в отношении  $1:2$ , считая от стороны, и является центром тяжести треугольника.

Кроме того, если образовать треугольники  $MAV$ ,  $MBC$  и  $MCA$  с общей вершиной в точке  $M$  — центре тяжести треугольника, то оказывается, что они равновелики. Это легко докажет каждый самостоятельно. Но не менее интересен поиск доказательства обратного утверждения:

**Задача 12.** Если внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $M$  так, что площади треугольников  $MAV$ ,  $MBC$  и  $MAC$  равны, то  $M$  — центр тяжести треугольника  $ABC$ .

Кто сетку из чисел  
Набросил на мир?

Велемир Хлебников

Целочисленной решеткой на плоскости называется множество точек (узлов), обе координаты которых — целые числа.

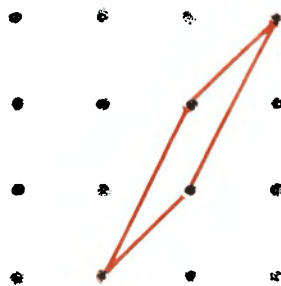


Рис. 77

Многоугольник (в частности, треугольник) с вершинами в узлах точечной решетки, не содержащий ни одного узла ни внутри себя, ни на сторонах (кроме тех, которые совпадают с его вершинами), называют основным решетчатым многоугольником (треугольником).

**Задача 13.** Докажите, что площадь основного решетчатого параллелограмма равна 1 (рис. 77) и как следствие площадь основного решетчатого треугольника равна  $\frac{1}{2}$ .

**Задача 14.** Если вершины треугольника совпадают с узлами целочисленной решетки, его стороны не содержат других узлов, а внутри треугольника находится один-единственный узел решетки, то центр тяжести треугольника совпадает с этим внутренним узлом. Докажите.

Ведь между двух соседних точек  
Прямая — самый краткий путь...

Л. Мартынов

**Задача 15.** Каждая сторона выпуклого четырехугольника  $ABCD$  разделена на 3 равные части. Через точки деления сторон  $AB$  и  $AD$ , ближайшие к вершине  $A$ , проведена прямая. Аналогичные прямые проведены и через точки деления, ближайшие к вершинам  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Докажите, что центр тяжести четырехугольника  $MQPN$ , образованного

проведенными прямыми, совпадает с центром тяжести четырехугольника  $ABCD$ .

А го и дело в руки лезут мне  
Предметы, вещи тяжести невиданной,  
Не соответствующей их величине...

*Л. Мартынов*

**Задача 16.** Однородный круглый диск подвешен в горизонтальном положении на шнурке, прикрепленном к центру диска  $O$ . В трех различных точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на краю диска, не нарушив его равновесия, поместили грузики, вес которых  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ . Вычислите углы  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COA$ .

Оставим книги и посоветуемся с разумом.  
*Р. Декарт*

**Задача 17.** На вопрос: «Почему линия сгиба листа бумаги — прямая?» — отвечают иногда так: «Линия сгиба — прямая, как линия пересечения двух плоскостей». Это — заблуждение. Какое объяснение следует признать правильным?

Мир занят тайным шифром,  
Пока он не прочтен  
И к разным прочим цифрам  
Иль буквам не причтен.

*И. В. Гете*

**Задача 18.** Решите ребус:

$$\begin{array}{r} \text{ЛО Н} - \text{В У} = \text{М В Л} \\ \vdots \quad \quad + \quad \quad - \\ \text{Н} \times \text{Н} = \text{П В} \\ \hline \text{П М} + \text{М А Л} = \text{М П Я} \end{array}$$

Из букв ребуса составьте инициалы имени, отчества и фамилию великого русского математика, создавшего теорию равновесия, названную его именем.

Под буквами подпишите цифры — числовые значения букв, найденные в результате решения ребуса. Какая обнаружится закономерность в последовательности написанных цифр?

Ага! увидел ты! а мне хотелось  
Тебя невинной шуткой угостить...

*А. Пушкин*

**Задача 19.** Какой знак следует поставить между дробями  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$ , чтобы оказалось верным равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} ?$$

Конструктивная игра  
И полезна, и мудра.

**Задача 20.** Начерчен какой-нибудь тупоугольный разносторонний треугольник. Требуется пристроить к нему равнобедренный треугольник так, чтобы получился новый треугольник. Сколько возможно разных конструкций?

Организуите конкурс: за определенное время кто построит заданных треугольников больше или защитит свой проект построения каждой возможной конструкции.

**Задача 21.** («Теорема Пифагора со знаком минус».) Пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — стороны треугольника. Противлежащие углы соответственно  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Если  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , то треугольник прямоугольный и  $a^2 + b^2 = c^2$  — теорема Пифагора.

Она же в другой записи:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2c^2. \quad (1)$$

А вот если треугольник тупоугольный, но такой, что  $\alpha - \beta = 90^\circ$ , то формула (1) приобретает очаровательный нюанс — показатель степени становится отрицательным:

$$(a+b)^{-2} + (a-b)^{-2} = 2c^{-2}. \quad (2)$$

Возникает образно говоря «теорема Пифагора со знаком минус».

Не менее любопытно: в том и другом случаях ( $\alpha + \beta = 90^\circ$  и  $\alpha - \beta = 90^\circ$ )

$$a^2 + b^2 = 4R^2, \quad (3)$$

где  $R$  — радиус описанной окружности. Докажите справедливость равенств (2) и (3).

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Возможно, рассуждала так: каждый мост имеет два конца, поэтому число концов должно быть четным. Но из описания следует, что это число равно  $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1$  и еще 5 концов, выходящих на берег материка. Получается, что сумма концов мостов нечетная, а этого не может быть.

2. Пусть  $T$  — сумма возрастов всех домов, а  $n$  — общее количество домов. Тогда  $\frac{T}{n}$  — средний возраст города. Если построить новый дом, средний возраст города станет равным  $\frac{T}{n+1} < \frac{T}{n}$ . Если снести старый дом, средний возраст города станет равным  $\frac{T-t}{n-1} < \frac{T}{n}$  ( $t$  — возраст сносимого дома). Получается, что город молодеет в любом случае. Но, что меньше:  $\frac{T}{n+1}$  или  $\frac{T-t}{n-1}$ ? Определим, при каком значении  $t$  выгоднее снести старый дом, чем строить новый:

$$\frac{T}{n+1} > \frac{T-t}{n-1} \text{ при } t > \frac{2T}{n+1}.$$

3. Любой множитель в заданном произведении имеет вид:

$$\frac{2n-1}{2n}, n=1, 2, \dots, 50.$$

Введем второе произведение из 49 дробей и одной единицы:  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99} \cdot 1$ , любой множитель которого, кроме последнего (единицы), имеет вид:

$$\frac{2n}{2n+1}, n=1, 2, \dots, 49.$$

Так как  $\frac{2n}{2n+1} > \frac{2n-1}{2n}$  при одном и том же значении  $n=1, 2, \dots, 49$  и  $1 > \frac{99}{100}$ , то вто-

рое произведение больше первого (заданного), а если их перемножить (фактически произойдет сокращение всех множителей числителя и равных им множителей знаменателя), то получится  $\frac{1}{100}$ . Следовательно, заданное произведение меньше, чем

$$\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}.$$

4. Пусть  $a < b < c$ , тогда  $\angle C$  наибольший в треугольнике. Приведем заданное равенство к виду

$$a^2 \cdot a + b^2 \cdot b = c^2 \cdot c.$$

Так как  $c > a$  и  $c > b$ , то

$$a^2 \cdot c + b^2 \cdot c > c^2 \cdot c \text{ или}$$

$$a^2 + b^2 > c^2. \quad (*)$$

По теореме косинусов

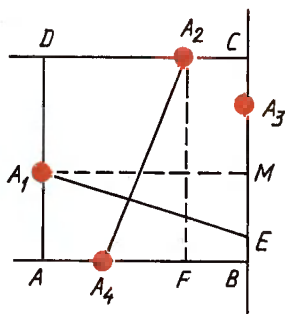
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Учитывая неравенство (\*), имеем  $\cos C > 0$ , откуда следует, что  $\angle C$  острый и треугольник остроугольный.

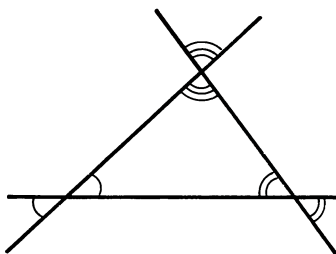
5. Если, исходя из условия задачи, составить систему из пяти уравнений с девятью переменными, то далее ее легко свести к одному линейному уравнению с пятью переменными:

$$6x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 6(z_1 + 1) + 5z_3,$$

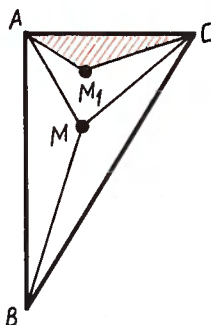
где  $x_1 > 12$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  соответственно число партийных, комсомольцев и беспартийных на станции Воробьево,  $z_1$ ,  $z_3$  соответственно число партийных и беспартийных на станции Дроздово. Получаются такие, например, возможные решения уравнения:



**Рис. 78**



**Рис. 79**



**Рис. 80**

	партий- ных	комсо- мольцев	беспар- тийных	
Воробьево	15	1	1	= 17
Грачево	3	5	9	= 17
Дроздово или	14	1	2	= 17
Воробьево	13	8	1	= 22
Грачево	1	10	11	= 22
Дроздово	15	3	4	= 22

6. Приведем уравнение к виду

$$1988x + 1988y = x \cdot y,$$

или

$$(x-1988) \cdot (y-1988) = 1988^2.$$

Так как  $1988 = 2^2 \cdot 7 \cdot 71$ , где 2, 7 и 71 — простые числа, то  $1988^2 = 2^4 \cdot 7^2 \cdot 71^2$  и  $x - 1988$  может содержать множители  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$  (5 множителей) в комбинации с множителями  $7^0, 7^1, 7^2$  (3 множителя) и  $71^0, 71^1, 71^2$  (3 множителя). Это дает  $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$  различных натуральных значений для числа  $x - 1988$  или 90 различных целых значений этого числа. Очевидно, заданному уравнению удовлетворяют все соответствующие значения, кроме  $x = 0$ .

Соответствующие значения  $y$  определяются из равенства

$$y = \frac{1988^2}{x - 1988} + 1988$$

Значит, заданное уравнение имеет 89 решений в целых числах.

## 7. Пусть

$$1990 = a^2 - b^2. \quad (*)$$

Поскольку 1990 делится на 2, то  $(a-b)$  и  $(a+b)$  оба четны и  $a^2-b^2$  должно быть кратно четырем, но 1990 не делится на 4. Значит, для уравнения (\*) нет решения в целых числах.

8. Положим, что число всех учащихся VI—X классов трехзначное:

$$100a + 10b + c.$$

Тогда по условию

$$a + b + c = 16.$$

Пусть число девочек

$$100a' + 10b' + c',$$

где  $a' + b' + c' = 16$ .

В таком случае

$$(a-a') + (b-b') + (c-c') = 0.$$

Число мальчиков:

$$(100a + 10b + c) - (100a' + 10b' + c') = 100(a-a') + 10(b-b') + (c-c').$$

Вычитая отсюда предыдущее равенство, получим:

$$9a(a-a') + 9(b-b').$$

Это число делится на 9, что и утверждал учитель математики.

9. Пусть  $A_1, A_2, A_3, A_4$  — заданные точки. Предположим, что искомый квадрат  $ABCD$  построен (рис. 78). Проведем отрезок  $A_2A_4$  и перпендикуляр к нему из точки  $A_1$  до пересечения с прямой  $BC$  в точке  $E$ . Проведем  $A_2F \perp DC$  и  $A_1M \perp BC$  (точки  $F$  и  $M$  на сторонах квадрата), тогда из равенства прямоугольных треугольников  $A_1ME$  и  $A_2FA_4$  ( $\angle A_1 = \angle A_2$  и  $A_1M = A_2F$ ) следует:

$$A_1E = A_2A_4.$$

В этом равенстве и содержится ключ к построению искомого квадрата:

1) Вернемся к исходному положению: сторон квадрата нет, есть только точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Построим отрезок  $A_2A_4$ .

2) Из  $A_1$  проведем перпендикуляр к  $A_2A_4$  и отложим  $A_1E = A_2A_4$ .

3) Проведем прямую  $A_3E$ . На этой прямой лежит сторона искомого квадрата.

4) Через точки  $A_2$  и  $A_4$  проведем прямые, перпендикулярные прямой  $A_3E$ . В пересечении получим две вершины квадрата:  $B$  и  $C$ .

Остальное ясно.

10. Пусть  $A$  и  $B$  — заданные концы одной стороны квадрата и пусть  $AB = a$ . Утвердив ножку циркуля, например, в точке  $A$ , надо провести радиусом  $a$  дугу окружности, на которой тем же раствором циркуля, начиная от точки  $B$ , последовательно отметить точки  $C, D, E$ . Точки  $B, C, D, E$ , очевидно, можно считать вершинами вписанного в окружность правильного шестиугольника. Далее, радиусом  $BD$ , равным стороне правильного вписанного треугольника ( $a\sqrt{3}$ ), из  $B$  и  $E$  надо описать дуги и отметить точку  $F$  их пересечения (достаточно только

по одну сторону прямой  $AB$ ). Затем радиусом  $AF$  описать из точек  $B$  и  $E$  дуги, которые пересекутся на дуге  $BCDE$  в точке  $G$ , так как  $OF = \sqrt{BD^2 - a^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$ , а это значит, что  $OF$  есть сторона квадрата, вписанного в окружность радиуса  $a$ . Так определились три вершины квадрата:  $B, A, G$ . Найти четвертую вершину  $H$  нетрудно: провести дуги радиусом  $a$  из точек  $B$  и  $G$ .

11. Продолжить стороны треугольника за вершины (рис. 79).

12. Мы уже знаем: внутри треугольника  $ABC$  есть такая точка  $M$  (его центр тяжести), что

$$S_{\triangle AMB} = S_{\triangle BMC} = S_{\triangle CMA}. \quad (*)$$

Остается лишь показать, что любая другая точка  $M_1$  внутри треугольника  $ABC$  не может обеспечить равенства (\*).

Если есть такая точка  $M_1$ , то она лежит внутри или на стороне одного из треугольников  $AMB, BMC, CMA$ . Предположим, что, например,  $M_1$  находится внутри треугольника  $AMC$  (рис. 80). В этом случае  $\triangle AM_1C$  составляет лишь часть треугольника  $AMC$ , и потому  $S_{\triangle AM_1C} < S_{\triangle AMC}$ , т. е. меньше  $\frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$ . Следовательно, треугольники  $AM_1C, BM_1C$  и  $AM_1C$  не равновелики, что противоречит условию.

13. Пусть  $ABCD$  — основной решетчатый параллелограмм (рис. 81). Заштрихуем части, на которые рассекает параллелограмм квадратная решетка, и при помощи параллельного переноса сдвинем  $\triangle CDE$  в поло-

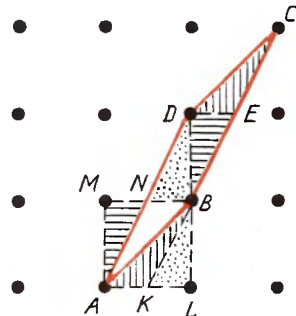


Рис. 81

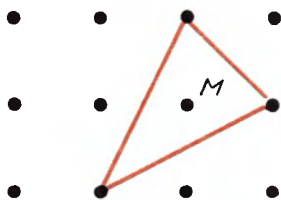


Рис. 82

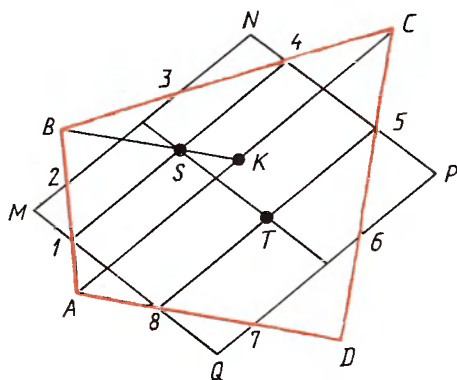


Рис. 83

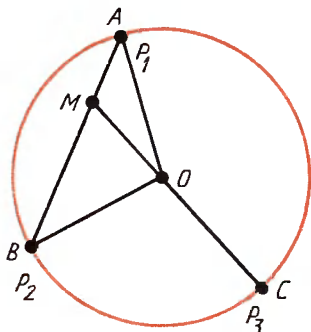


Рис. 84

жение  $BAK$ ,  $\triangle DEB$  в положение  $MNA$  и  $\triangle DNB$  в положение  $BLK$ . Части параллелограмма, переместившиеся в квадрат  $AMBL$ , не имеют общих внутренних точек (доказательство этого утверждения оставим на любителя) и вместе с незаштрихованной частью параллелограмма заполняют квадрат  $AMBL$ , площадь которого равна 1. Следовательно, площадь параллелограмма также равна 1.

Если провести диагональ  $DB$  параллелограмма, то образуются два равновеликих основных решетчатых треугольника  $ADB$  и  $CDB$ , площадь каждого из них равна  $\frac{1}{2}$ .

14. Пусть  $ABC$  — решетчатый треугольник, о котором говорится в условии задачи, а  $M$  — «внутренний» узел (рис. 82).

Решетчатые треугольники  $MAB$ ,  $MBC$  и  $MAC$  основные, и площадь каждого из них равна  $\frac{1}{2}$  (см. задачу 13).

А из равновеликости треугольников  $MAB$ ,  $MBC$  и  $MAC$  сразу следует, что узел  $M$  решетки совпадает с центром тяжести треугольника  $ABC$  (см. задачу 12).

15. Будем придерживаться обозначений, показанных на рисунке 83. Требуется доказать, что центр тяжести четырехугольника  $ABCD$  совпадает с центром тяжести четырехугольника  $MNPQ$ , который является параллелограммом, поскольку прямые  $MN$  и  $QP$  (а также прямые 1—4 и 8—5) параллельны прямой  $AC$ , а прямые  $MQ$  и  $NP$  параллельны прямой  $BD$ .

Определим прежде всего центры тяжести треугольников  $ABC$  и  $ADC$ , на которые диагональ  $AC$  разбивает четырехугольник  $ABCD$ . Центр тяжести  $S$  треугольника  $ABC$  лежит на медиане  $BK$  этого треугольника, причем  $BS = \frac{2}{3}BK$ . Поскольку треугольник  $1B4$  подобен треугольнику  $ABC$  с коэффициентом  $\frac{2}{3}$ , то точка  $S$  совпадает с серединой отрезка 1—4. Аналогично можно показать, что центр тяжести  $T$  треугольника  $ADC$  совпадает с серединой отрезка 8—5. Известно, что если фигура составлена из двух частей, не налегающих одна на дру-

гую, то центр тяжести такой фигуры лежит на отрезке, соединяющем центры тяжести обеих частей. Следовательно, центр тяжести четырехугольника  $ABCD$  лежит на отрезке  $ST$  и, значит, на прямой, проходящей через середины сторон  $MN$  и  $QP$  параллелограмма  $MNPQ$ . Точно так же центр тяжести четырехугольника  $ABCD$  должен лежать и на прямой, проходящей через середины сторон  $MQ$  и  $PN$  того же параллелограмма. Обе прямые, которым принадлежит центр тяжести четырехугольника  $ABCD$ , пересекаются в центре параллелограмма  $MNPQ$ , т. е. в его центре тяжести. Следовательно, центры тяжести четырехугольника  $ABCD$  и параллелограмма  $MNPQ$  совпадают.

16. Точка  $M$  приложения силы  $P$ , равнодействующей параллельных одинаково направленных сил  $P_1$  и  $P_2$ , находится на отрезке  $AB$  (рис. 84), причем

$$AM:MB = P_2:P_1. \quad (1)$$

Поскольку добавление грузиков не нарушило равновесия диска, то равнодействующая всех трех параллельных сил  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  проходит через точку  $O$ . Следовательно, точка  $M$  отлична от точки подвески  $O$ , а точка приложения силы  $P_3$  (точка  $C$ ) находится на пересечении луча  $MO$  с краем диска. По теореме синусов в применении к треугольникам  $AOM$  и  $BOM$  имеем:

$$AM:\sin AOM = OM:\sin A;$$

$$MB:\sin MOB = OM:\sin B.$$

Поскольку  $\angle A = \angle B$ , то

$$AM:\sin AOM = MB:\sin MOB. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$P_2:\sin AOM = P_1:\sin MOB,$$

а поскольку

$$\angle AOM = 180^\circ - \angle COA,$$

$$\angle MOB = 180^\circ - \angle BOC,$$

то

$$P_1:\sin BOC = P_2:\sin COA.$$

Аналогичные равенства имеют место и для остальных пар искомых углов. Объединяя их, находим:

$$\frac{P_1}{\sin BOC} = \frac{P_2}{\sin COA} = \frac{P_3}{\sin AOB}. \quad (3)$$

Равенства (3) позволяют вычислить углы  $BOC$ ,  $COA$  и  $AOB$ .

Действительно, пусть

$$\alpha = 180^\circ - \angle BOC, \quad \beta = 180^\circ - \angle COA,$$

$$\gamma = 180^\circ - \angle AOB.$$

Поскольку сумма центральных углов  $BOC$ ,  $COA$  и  $AOB$  равна  $360^\circ$ , то получаем  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  и равенства (3) преобразуются к виду

$$\frac{P_1}{\sin \alpha} = \frac{P_2}{\sin \beta} = \frac{P_3}{\sin \gamma},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  можно рассматривать как углы треугольника с длинами сторон  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ . Величину их можно вычислить, применив к этому треугольнику теорему косинусов, а искомые углы  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$  — как дополнения углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  до  $180^\circ$ . Действуя так, получаем:

$$\cos BOC = \frac{P_1^2 + P_2^2 - P_3^2}{2P_2P_3},$$

$$\cos COA = \frac{P_2^2 + P_3^2 - P_1^2}{2P_3P_1}, \quad (4)$$

$$\cos AOB = \frac{P_3^2 + P_1^2 - P_2^2}{2P_2P_1}.$$

Поскольку каждый из углов  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$  заключен между  $0^\circ$  и  $180^\circ$ , то соотношениями (4) искомые углы определены однозначно.

**Примечание.** Грузики могут иметь произвольный вес, но ограниченный выполнением неравенств:

$$P_1 + P_2 > P_3, \quad P_2 + P_3 > P_1, \quad P_3 + P_1 > P_2. \quad (5)$$

В противном случае равновесие диска не будет обеспечено.

Тема для самостоятельного исследования: доказать, что неравенства (5) являются необходимым и достаточным условием для существования решения задачи.

17. Вот правильное объяснение. Пусть  $P$  и  $P'$  — две точки листа бумаги, совпадающие при его перегибе. Так как лист бумаги нерастяжим, то при его перегибании с наложением одного куска листа на другой





# «РУССКИЙ АРХИМЕД» — ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ СТЕКЛОВ



В. А. Стеклов (1864—1926)

## «К доблести и знанью»

Городу Нижний Новгород выпала честь быть родиной Н. А. Некрасова, И. П. Кулибина — выдающегося русского механика, первым в мире применившего графитовую смазку механизмов, Н. И. Лобачевского, а также В. А. Стеклова.

Первоначальное обучение как у Лобачевского, так и у Стеклова было домашним. Но Коле Лобачевскому для продолжения образования пришлось уехать в Казань, так как в то время (первое десятилетие XIX в.) только в Казани было среднее учебное заведение — гимназия — одна на все Поволжье и Сибирь.

Для Володи Стеклова аналогич-

ная проблема решалась проще. Его отец — Андрей Иванович Стеклов — преподаватель и ректор духовной семинарии и мать — Екатерина Александровна — сестра выдающегося русского критика, публициста, революционера-демократа Николая Александровича Добролюбова дали Володе достаточную домашнюю подготовку для уверенного преодоления вступительного экзамена в местную гимназию, которая в те времена имела и в Нижнем Новгороде, но почему-то именовалась Нижегородским Александровским институтом.

Известен такой совет великого итальянского поэта Данте:

Тот жалкий срок, пока еще не спят  
Земные чувства, их остаток скудный  
Отдайте постиженью новизны,  
Чтоб солнцу вслед увидеть мир  
безлюдный.

Подумайте о том, чьи вы сыны!  
Вы созданы не для животной доли,  
А к доблести и знанью рождены!

И Володя Стеклов пошел «к доблести и знанью». Но первые пять лет пребывания в этом институте он не проявлял особого интереса к учебе. Живой, предприимчивый, смелый, он во главе ватаги сверстников неприменный участник мальчишеских развлечений и проказ. Все это, как впоследствии вспоминал сам Владимир Андреевич, «способствовало укреплению здоровья и нервной системы, но отнюдь не успешному прохождению курсов».

Однако после окончания пятого класса он основательно повторил

## И «миг счастливый» наступил

в течение каникул все гимназические предметы за пятый класс и уже к концу первой четверти шестого класса был в числе лучших учеников. С этого времени Володя Стеклов с увлечением изучал не только обязательные предметы, но и всесторонне расширял свои знания; в круг его особых интересов вошли физика, химия, математика и... искусство. Он увлекался музыкой, пением, театром настолько, что по окончании гимназии чуть было не выбрал путь в искусство.

И все же влечение к науке оказалось более сильным.

Отрывок из стихотворения «Договор» исландского поэта Торстейна Эрлингссона (1858—1914):

И если слышишь ты науку таинственный  
зов,

И если азбуку природы начал с азов,

И хочешь сам найти ответ к загадке  
любой,—

Я эту книгу прочитаю вместе с тобой...

*(Поэт имеет в виду «книгу природы»).*

Революционно - демократические убеждения, страстно отстаиваемые Н. А. Добролюбовым, разумеется, влияли на формирование достаточно передовых общественно-политических взглядов его племянника — Володи Стеклова. И хотя Володя не слыл в гимназии опасным вольнодумцем, все же в выпускном сочинении на тему «Прекрасный век был век Екатерины», по мнению педсовета, проявил «неустойчивость во взглядах и признаки вредного направления», за что при окончании института-гимназии и получил не золотую медаль, а серебряную, хотя в его аттестате все оценки были отличные.

В том же году Владимир Стеклов становится студентом первого курса физико-математического факультета Московского университета. Первый год обучения закончился ударом по его сильной, но самолюбивой натуре: основные экзамены он сдал на «хорошо», и «отлично», а по физической географии получил двойку — не смог ответить на вопрос: «Какой день в году самый долгий?»

Как же так, он, Владимир Стеклов, привыкший быть первым среди сверстников, справедливо ощущающий свои большие способности, и вдруг — такая горькая пилюля? Первоначальная реакция на неудачу — перевестись на медицинский факультет, но мест не оказалось. Тогда Владимир решается на повторный штурм высот математического образования и поступает вновь на первый курс математического факультета, но не Московского, а Харьковского университета.

— Я понял снова, как и раньше, при переходе в шестой класс гимназии, что лентяйству должен быть во второй раз положен конец, — признался Владимир Андреевич в своих автобиографических записках.

В Харьковском университете отныне и навсегда он устанавливает для себя строгий, напряженный ритм работы и сразу же становится центральной фигурой кружка студентов, особо преданных интересам науки.

Определяющую роль в становлении будущего ученого Владимира Андреевича Стеклова сыграл молодой профессор Харьковского университета, талантливый математик и механик А. М. Ляпунов (1857—1918) — ученик П. Л. Чебышева, сам впоследствии ставший действи-



Московский университет

тельным членом Академии наук. Студенту Стеклову пришлось по вкусу научные устремления его учителя А. М. Ляпунова. Между учителем и учеником возникла общность интересов, тем более что по возрасту разница между ними была лишь неполных 7 лет. До конца жизни Владимир Андреевич сохранил чувство исключительного уважения к своему учителю.

Философов, поэтов, горновых,  
Горнистов, возвещающих зарю,  
Я помню всех учителей своих,  
За выучку их всех благодарю.  
Я на земле живу,  
А не гошу.  
Мне в этой жизни  
Дело до всего!  
Не потому ль я до сих пор ищущу  
И нахожу —  
Учиться у кого.  
Но верю я и в миг счастливый тот,  
Когда, сверяя путь судьбы своей,  
Мне неизвестный мастер назовет  
Меня среди своих учителей...

И «миг счастливый» наступил сразу, как только был окончен университет (в 1887 году). Университет был окончен со степенью кандидата наук. Владимира Стеклова оставляют при Харьковском универ-



Харьковский университет

ситете в качестве преподавателя и для подготовки к профессорскому званию. С той поры многие «мастера математики» назовут его — Владимира Андреевича Стеклова — «среди своих учителей».

В первое же лето после окончания университета он гостит в имении своего знакомого — бывшего профессора Одесского университета и здесь самостоятельно выполняет научную работу о движении твердого тела в жидкости. Развивая впоследствии эту тему, ему удалось сделать важное математическое открытие, значение которого оказалось сравнимым с открытием С. В. Ковалевской при исследовании ею движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Еще через год (в 1889 году) появилась в «Сообщениях Харьковского математического общества» его первая печатная работа. С этого времени не было года, когда в печати не появлялись бы работы В. А. Стеклова.

Литовский поэт Юстинас Марцинкявичус написал такие строки:

Воспеваю высокое напряженье,  
И далекие трассы,  
И тревожное ошущенье  
Энергии, а не Массы.  
Состоянье покоя — не принимаю

На словах и на деле.  
Словно выстрел судьбу понимаю,  
Словно выстрел по цели.

*Перевод Ст. Куняева*

А цель его, предопределенная судьбой,— научное творчество, ставшее с этого времени неизменным и основным делом жизни Владимира Стеклова.

## Многообразие дарований

Интересы В. А. Стеклова с самого начала его научной деятельности были очень разносторонними: теория упругости, гидродинамика, высшая алгебра и больше всего — математическая физика. Именно к этой области математики — математической физике — относятся наиболее важные его исследования, ставшие классическими.

На протяжении всей жизни он вел обширную переписку с отечественными и зарубежными математиками и физиками. Эта переписка способствовала созданию, сравнению и корректированию разных методов решения одинаковых или же подобных задач, приводила к постановке и решению новых задач. В переписке возникали дискуссии, объективно оценивался вклад в науку того или иного ученого. Наконец, научные связи позволяли постоянно быть в курсе последних достижений мировой науки.

В 1901 году Владимир Андреевич и его супруга Ольга Николаевна понесли тяжелую утрату. Умерла их единственная дочь Оля. Ее смерть сильно потрясла Владимира Андреевича, и он почти полгода не мог приняться за научные исследования.

В 1902 году В. А. Стеков получил степень доктора прикладной математики после защиты диссертации

«Общие методы решения основных задач математической физики». В том же году Петербургская академия наук избрала его своим членом-корреспондентом, а в 1912 году — действительным членом Академии наук.

Харьковский период деятельности Владимира Андреевича продолжался до 1906 года. С апреля 1906 года и последующие 20 лет он живет и плодотворно трудится в Петербурге.

Профессор университета и глава созданной им научной школы математической физики, историк математики, философ и писатель, академик и общественный деятель, а после революции — организатор советской науки, последние 7 лет жизни — вице-президент Академии наук.

Много раз Владимир Андреевич бывал за границей. Посещал музеи, библиотеки, места исторических событий. Большой знаток и любитель музыки и пения, он при всякой возможности бывал в театрах и на концертах. Он сам любил петь, у него был великолепный бас.

Из воспоминаний певицы и гитаристки Татьяны Лещенко-Сухомлиной: «Скромная дача моей бабушки А. Е. Прохоровой в Кисловодске. На террасе, выходящей в запущенный сад, где высится скала, поет во весь свой могучий голос племянник бабушки, академик Владимир Андреевич Стеков, физик и математик, позднее — вице-президент Академии наук, высокий, бородатый, ласковый к нам, детям... Петь любил до страсти и, приезжая с женой на лето к нашей бабушке, пел по утрам на весь Кисловодск. Репертуар у него был оперный: «О, дайте, дайте мне свободу!» или ария Демона и тому подобное. Пел он отменно хорошо, и мы с братом слушали его как замороженные».



Они в самом тебе. Ты сам свой высший суд;  
Всех строже оценить умеешь ты свой труд...

*А. С. Пушкин*

Вспоминая о своем учителе, академик В. И. Смирнов писал: «Не в темпераменте Владимира Андреевича было складывать руки в тяжелый момент. Чем затруднительнее было положение, тем с большей энергией брался Владимир Андреевич за дело... Он был человеком исключительной воли, целеустремленности и общественного темперамента. Это ярко сказывалось во всей его деятельности... Но ошибочно было бы представить себе Владимира Андреевича только как математика. Он был большим знатоком русской истории и русской музыки. Его привычка приводить по разным поводам случаи из русской истории, изречения Петра Первого, Ломоносова, Лобачевского была не просто любовью к русскому стилю, а выражением подлинной, кровной связи со всей русской культурой».

Перу В. А. Стеклова принадлежит более 170 печатных работ. В их числе несколько книг в трудном жанре научно-художественной прозы: о М. В. Ломоносове, о Галилео Галилее, о Чебышеве, Лобачевском, Ляпунове, Маркове и др. В книге на историко-философскую тему «Математика и ее значение для человечества» (1920) делается интересный вывод, что «математика всегда являлась и является источником философии, что она создала философию и может быть названа «матерью философии».

Талант В. А. Стеклова в области художественной прозы проявился в книге «В Америку и обратно. Впечатления» (Л., 1925).

## Имени Стеклова

23 февраля 1926 года отмечалось 100 лет со дня открытия Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии. Владимир Андреевич, высоко чтивший великого геометра, присутствовал на торжествах в Казани, хотя был не вполне здоров. От Москвы до Казани пришлось ему ехать в холодном вагоне, он промерз и простудился. Домой вернулся с температурой около 39°. Состояние здоровья прогрессивно ухудшалось, и 30 мая 1926 года Владимир Андреевич Стеклов скончался. Похоронили его на Волковом кладбище в Ленинграде.

Дождям — лететь, листья — мелькать,  
Снегам — блистать, слепя...  
А нам — печально привыкать  
К тому, что нет тебя.

*Олег Дмитриев.*

Многие результаты исследований и открытия В. А. Стеклова вошли в мировую математическую литературу с его именем, в числе которых «фундаментальные функции Стеклова», «теория замкнутости Стеклова», «теорема Стеклова», «преобразование Стеклова», «функция Стеклова»:

$$F(x) = \frac{1}{h_x} \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

обладающая многими свойствами, лучшими, чем исходная функция  $f(x)$ .

Всемирно известный Математический институт Академии наук в Москве вот уже более 50 лет по праву и с гордостью носит имя В. А. Стеклова.



### «Арифметическая сюита»

«Арифметическая сюита» на тему «Дважды два — четыре» исполняется «литературным квартетом» в составе одного великого писателя и трех поэтов:

Базаров: «Важно то, что дважды два — четыре, а остальное все пустяки».

*И. С. Тургенев*

На то, что дважды два — четыре,  
В ученом мире смотрят шире.

*Игорь Шаров*

Разбегаются галактики  
В расширяющемся мире,  
Усомнились математики  
В том, что дважды два — четыре...

*Лира Ерошевская*

Таблица умноженья  
Достойна уваженья.  
Она всегда во всем права:  
Чтоб ни случилось в мире —  
А все же будет дважды два  
По-прежнему — четыре.

*С. Я. Маршак*

А мы последуем совету Данте:

Следуй своей дорогой,  
И пусть люди говорят, что угодно...

Займемся числами, ведь, по словам поэта,

Все оттенки смысла  
Умное число передает.

Действительно,

Число питает мысль...  
Мысль раскрывает смысл,  
таящийся в числе  
и спрятанный за ним.

*Б. Кедров*

Задача 1. Быль или небылица, но рассказывают так: шел Владимир Андреевич Стеклов по улице с одним из своих учеников, и повстречались им его знакомых трое. Поговорили немного, разошлись. Владимир Андреевич сказал своему спутнику: «Моем знакомым, вместе взятым, в 4 раза больше лет, чем тебе. Произведение же их лет составляет 2450. Зная это, сможешь ли ты определить возраст каждого?»

Юноша подумал и сказал, что необходимо еще хотя бы одно ограничение. «Да,— согласился Владимир Андреевич,— все они моложе меня». Теперь юноша дал быстро правильный ответ. Для ученика Владимира Андреевича задача оказалась нетрудной, так как ему был известен возраст свой и учителя. Однако и не зная этого, можно определить возраст не только трех знакомых Владимира Андреевича, но еще возраст и ученика, и его учителя — Владимира Андреевича Стеклова. Решите эту задачу! Предполагается, что все числа лет целые, меньшие 100 и большие 1.

Задача 2. Случился аналогичный эпизод и в наше время. Как-то ребята-кружковцы спросили своего учителя математики: «Какого вы года рождения?» «В далеком 1964 году,— ответил учитель,— мне исполнилось столько лет, какова сумма цифр моего года рождения. Поскольку я родился в этом веке, вы легко можете вычислить мой возраст».

В каком же году родился этот учитель?

Задача 3. Дата 5 мая 1955 года может быть записана так: 5.5.55. В этой записи встречается только одна цифра 5. Сколько раз в течение одного столетия дата, состоящая из числа, месяца и двух последних

цифр года, может быть записана при помощи только одной цифры?

**Задача 4.** Забавный случай: некоторое натуральное число с цифрой десятков 3 делилось с остатком на другое натуральное число, цифрой единиц которого была четверка. При повторном делении цифру 3 в делимом ошибочно приняли за 8, а цифру 4 в делителе — за 9. К удивлению, ни частное, ни остаток не изменились. Чему равно это частное? Кроме того, докажите самостоятельно, что делитель должен быть не менее чем трехзначным числом.

**Задача 5.** Что больше:  $63^9$  или  $33^{11}$ ?

**Задача 6.** Докажите, что числа  $207^{208}$  и  $209^{210}$  оканчиваются одной и той же цифрой.

**Задача 7.** Может ли сумма чисел натурального ряда

$$1 + 2 + \dots + k$$

при каком-либо значении  $k$  оканчиваться цифрой 7?

**Задача 8.** На шахматной доске, содержащей 64 клетки, произвольно проведена прямая. Чему равно наибольшее число клеток, которые она может пересечь?

**Задача 9.** На концах диаметра окружности расположились единицы. В середине каждой полуокружности пишем сумму чисел, стоящих на концах полуокружности. Затем, вторым шагом, в середине каждой из четырех получившихся дуг пишем число, равное сумме чисел, стоящих на концах дуги, и т. д. Найдите суммы всех записанных чисел после первого шага (включая и первоначальные единицы); после второго шага; третьего... Докажите, что суммы всех записанных чисел при любом шаге будут увеличиваться вдвое.

**Этюд на тему: «Бином Ферма»**

Горят причудливо краски,  
И, как ни мудра голова,

Вы все-таки верьте сказке,  
Сказка всегда права.

Э. Асадов

И даже так: «Математика вездесуща, она присутствует даже в сказках» (Дж. Родари). Явно или неявно она присутствует и в фантастике — этом сплаве сказки и науки. Превосходным примером такого сплава выдумки и фактов из жизни и творчества француза Пьера Ферма — адвоката по профессии и гениального математика по дарованию — является научно-фантастический роман А. П. Казанцева «Острее шпаги» (М., 1984) «о магистре Прав, Чисел и Поэзии и его современниках». Написан в стиле увлекательных романов А. Дюма, с убедительной правдоподобностью и примерами изумительных находок — математических жемчужин. Одна из них — несправедливо забытый «бином Ферма»:

$$(x+y)^n = (Mx+y)^n + (x+Ny)^n, (1) \\ n \in \mathbb{N},$$

непосредственно ведущий к диофантову уравнению

$$x_1^n + y_1^n = z_1^n, (2)$$

послужившему Ферма импульсом к формулировке своей великой теоремы.

В романе приведено лишь краткое описание приема получения уравнения  $x_1^n + y_1^n = z_1^n$ , данное самим Ферма: «Я решил воспользоваться сразу двумя системами координат — прямой и перевернутой. Это позволило мне создать метод совмещенных парабол...»

Соответствующие этому методу «совмещенных парабол» построения и рассуждения восстановил новосибирский математик А. Н. Кожевников.

В системе прямоугольных координат  $xOy$  с горизонтальной осью  $x$

и вертикальной осью  $q$  вычерчивается парабола по уравнению  $q = x^n$ . Чертеж поворачивается на  $180^\circ$  и на нем наносится (рис. 86) еще одна система координат  $yO'l$  с горизонтальной осью  $y$  и вертикальной осью  $l$ . Вертикальные оси двух систем отстоят одна от другой на величину  $z_1$ , а горизонтальные — на  $z_1^n$ . В перевернутой системе координат тоже вычерчивается такая же парабола по уравнению  $l = y^n$ . Две совмещенные таким способом параболы образуют фигуру, ограниченную ими. Выбирая точку  $x_1$  на оси  $x$ , строим от нее вертикальный отрезок (до пересечения с первой построенной параболой) с длиной  $q_1 = x_1^n$ . Проведя теперь горизонтальную линию от пересечения вертикального отрезка с параболой через фигуру до второй параболы, получим точку, вертикальный отрезок от которой до оси  $y$  перевернутой координатной системы отметим на оси  $y$  (точку  $y_1$ ). Длина же этого отрезка, равная ординате перевернутой параболы, будет  $l_1 = y_1^n$ . Из построения следует:

$$q_1 + l_1 = x_1^n + y_1^n = z_1^n. \quad (3)$$

Исходя из полученного уравнения (3) и чертежа, заслуженный деятель науки и техники России, профессор М. М. Протоdjяконов по просьбе А. П. Казанцева разработал вывод формулы «бинома Ферма».

Из чертежа следует:

$$z_1 = A + B + C, \quad x_1 = A + C, \quad y_1 = B + C.$$

И так как  $z_1^n = x_1^n + y_1^n$ , то

$$(A + B + C)^n = (A + C)^n + (B + C)^n. \quad (4)$$

Далее для приведения этого равенства к виду (1) по воле автора решения, как по взмаху волшебной палочки, появляется некая дробь, после умножения на которую обеих сторон равенства (4), выполнения несложных преобразований и введе-

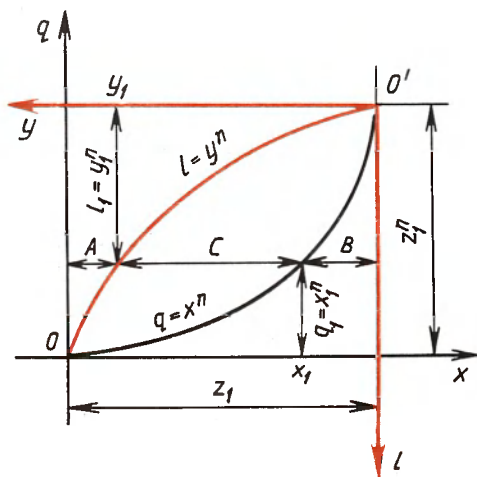


Рис. 86

ния числа  $M = \frac{C}{A+B+C}$  получится равенство требуемого вида:

$$(A + B)^n = (A + M \cdot B)^n + (B + M \cdot A)^n. \quad (5)$$

**Укroщение строптивой теоремы Ферма**  
(просто информация «к сведению»)

Кажется, совершилось все-таки то, чего более трех веков безуспешно добивались десятки крупных ученых и сотни любителей, прозванных ферматистами! В конце мая 1993 г. сенсационное сообщение приковало внимание цивилизованного населения всего мира: сорокалетний математик доктор Эндрю Уайлз в своей трехчасовой лекции в Кембриджском университете изложил разработанное им доказательство знаменитой теоремы Ферма о том, что уравнение  $x^n + y^n = z^n$  не имеет решений в положительных целых числах для любого целого  $n > 2$ .

«Логика доказательства убедительна, поскольку она строится на базе тщательно разработанной стройной системы взглядов, сложив-

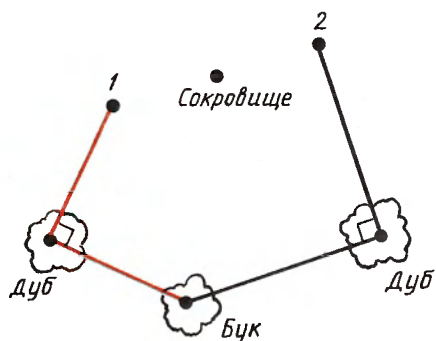


Рис. 87

шейся в математике более тридцати лет назад» — признали авторитетные математики, слушавшие лекцию доктора Уайлза.

Когда доказательство Уайлза будет опубликовано, лучшие математические головы вновь «заболеют» тщательной его проверкой, борясь теперь уже за первенство в обнаружении возможных промахов или, наоборот, окончательного и полного признания его корректности.

**Задача 10.** Восстановите преобразование профессора Протодеяконова, ведущее от равенства (4) к равенству (5), или придумайте свой способ.

**Задача 11.** Вдруг случилось бы такое: изготовили бы гигантский бисквит в форме выпуклого многоугольника, имеющего 1918 вершин. А по верхней поверхности бисквита разместили бы 41 изюминку так, что никакие 3 не лежат на одной прямой. В этом случае, сказал учитель математики, он смог бы разрезать бисквит на треугольные куски, вершинами которых были бы только изюминки и вершины многоугольника.

И когда он сделал бы так, то в результате получилось бы столько треугольных кусков, сколько всего учащихся в трех школах нашего

района, и каждый ученик без исключения получил бы по одному треугольному куску бисквита.

Сколько учеников в этих трех школах и сколько в каждой, если число учащихся в любой из них, написанное на листе бумаги, легко увеличить в полтора раза, не производя никакого арифметического действия?

**Задача 12.** (Вполне научная сказка о пиратах и зарытом сокровище.) Капитан и два матроса с пиратского корабля торопились спрятать на пустынном острове сундучок с драгоценностями. Единственными ориентирами на острове были три дерева: бук на берегу и поодаль два дуба по разные стороны от бука (рис. 87). Долговязому Джону капитан приказал протянуть веревку от дуба к буку, затем повернуть внутрь участка под прямым углом и сделать столько же шагов, сколько было от бука до дуба. Это точка 1. Одновременно второму матросу следовало проделать то же самое относительно бука и второго дуба. Конец пути — точка 2. Сундучок закопали на полпути между точками 1 и 2. «О'кей! Забирайте веревки, — скомандовал капитан, — мы покидаем остров, а за сокровищем вернемся через год».

Но долговязый Джон решил единолично завладеть спрятанным сокровищем, и вскоре ему в сопровождении приятеля-юнга удалось тайком от капитана вновь пробраться на этот остров. И что же он увидел? Дубы на месте, а бука нет. По-видимому, штормом выдрало его и унесло в море. Никаких следов не осталось от бука. Пригорюнился Джон. Но — вот удача! Юнга оказался весьма толковым и сообразительным парнем. «Не огорчайся, Джон, — сказал юнга, — я найду ваше сокровище и без бука». И он это сделал. Как?

**Задача 13.** (Другой вариант

сказки.) Экспедиция геологов выса-  
дилась на пустынном необитаемом  
острове, на котором не было ни строе-  
ний, ни деревьев, только два камня,  
прочно укрепившиеся в земле. Под  
одним геологи нашли железный  
ящик, а в ящике — хорошо сохра-  
нившуюся записку с описанием по-  
строений, которые еще в прошлом  
веке выполнял пират, чтобы пона-  
дежнее укрыть в земле острова свое  
сокровище.

Пират был, по-видимому, хоро-  
шим геометром. Воспроизведите в  
тетради его построения, следуя та-  
кому описанию. Пусть точки  $A$  и  $B$  —  
местоположения камней,  $C_1, C_2,$   
 $C_3$  — три пальмы (теперь их нет на  
острове). Постройте точку  $A_1$  так,  
чтобы  $A_1C_1=AC_1$  и  $\angle AC_1A_1=90^\circ$ ,  
точку  $B_1$  так, чтобы  $B_1C_1=BC_1$  и  
 $\angle BC_1B_1=90^\circ$  (рис. 88).

При этом направление луча  $C_1A_1$   
следует выбрать таким, чтобы пере-  
секались отрезки (а не их продол-  
жения)  $A_1B$  и  $AB_1$ . Пусть  $P_1$  — точ-  
ка пересечения этих отрезков. Ана-  
логичным построением (только с ис-  
пользованием соответственно пальм  
 $C_2$  и  $C_3$ ) надо получить точки  $P_2$  и  
 $P_3$ . Клад находится в центре окруж-  
ности, проведенной через точки  $P_1,$   
 $P_2$  и  $P_3$ .

Пальм на острове уже не было,  
и все же геологи нашли то место,  
где был зарыт клад. Как?

Так геометр, что железным  
Все измерить смог числом,  
Заглянуть дерзает в бездны  
Очевидных аксиом.

*Василий Казанцев*

Задача 14. Пусть отрезок  $EF$   
параллелен основаниям трапеции.  
Тогда если  $EF$  — средняя линия, то  
ее длина — среднее арифметическое  
длин оснований; если же он делит  
трапецию на две подобные трапеции,

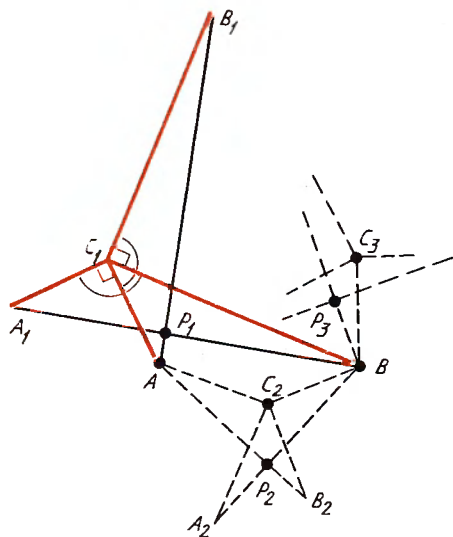


Рис. 88

то среднее геометрическое, а если  
проходит через точку пересечения  
диагоналей, то среднее гармоничес-  
кое;  $x$  — среднее гармоническое  $a$  и  
 $b$ , если

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Докажите!

Задача 15. Начерченный угол  
содержит ровно  $19^\circ$  (рис. 89). При-  
думайте способ построения с по-  
мощью циркуля и линейки угла,  
составляющего  $\frac{1}{19}$  часть данного угла,  
т. е. угол в  $1^\circ$ .

Сворачивает парадокс, куда захочет,  
Рассудок здравый он, смеясь, морочит!

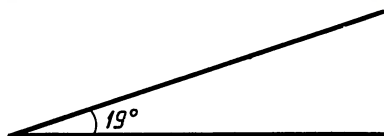


Рис. 89

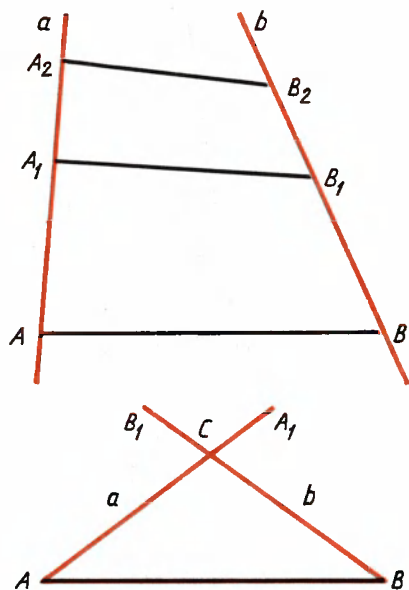


Рис. 90

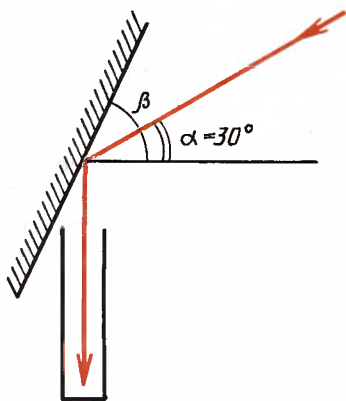


Рис. 91



Рис. 92

Задача 16. (Софизм Прокла из Византии (412—485): «Никакие две прямые не пересекаются».) Возьмем две различные прямые  $a$  и  $b$  в одной плоскости (рис. 90), точку  $A$  на  $a$  и точку  $B$  на  $b$ . Соединим отрезком  $A$  и  $B$  и построим два таких отрезка, что  $AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}AB$ . Отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  не пересекаются, ибо в противном случае, т. е. если они пересекаются, например, в точке  $C$ , имели бы, что

$AB < AC + CB < \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB = AB$ ,  
чего быть не может. Строим теперь  $A_1A_2 = B_1B_2 = \frac{1}{2}A_1B_1$ . Рассуждая, как и прежде, получим аналогичное противоречие:  $A_1B_1 < A_1B_1$  и т. д. Заключаем: прямые  $a$  и  $b$  не пересекаются.

Найдите изъян в этих рассуждениях Прокла из Византии.

С физикой — в путь,  
В суть — с математикой.

А. Лемберг

Задача 17. Человек посмотрел по вертикальному направлению на дно водоема и оценил его кажущуюся глубину в  $h = 0,9$  м.

Определите истинную глубину водоема. Показатель преломления воды  $n = 1,33$ .

Задача 18. Под каким углом  $\beta$  к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы осветить дно колодца отраженными от него солнечными лучами в тот момент, когда свет падает под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту (рис. 91)?

Задача 19. Задана оптическая ось  $OO'$  линзы, светящаяся точка  $S$  и ее изображение в линзе  $S'$  (рис. 92).

Найдите построением положение фокуса  $F$  линзы.



Задача 20. Студент, опоздавший к посадке на поезд, вбежал на платформу и по привычке к лабораторным исследованиям, включив секундомер, определил, что предпоследний вагон прошел мимо него за время  $t_1 = 10$  с, а последний — за  $t_2 = 8$  с. Затем, считая движение поезда равноускоренным, вычислил время своего опоздания. С помощью графика зависимости скорости поезда  $v$  от времени  $t$  он очень красиво и быстро решил свою задачу. Как?

Задача 21. На одну и ту же площадку  $S$  (рис. 93) падает один и тот же световой поток  $\Phi$ , но под разными углами. В каком случае освещенность площадки больше?

Задача 22. (*Быстрые атомы серебра.*) Скорость теплового движения атомов была впервые измерена немецким физиком О. Штерном. Для этого им была использована установка, схема которой показана на рисунке 94.

По оси двух жестко скрепленных между собой полых цилиндров, из которых был откачан воздух, проходила платиновая проволочка, покрытая слоем серебра. Проволока нагревалась электрическим током, и атомы серебра испарялись. Испаряющиеся атомы проходили через щель в малом цилиндре и осаждались на внутренней поверхности большого цилиндра. Так получалась полоска  $A$ . Затем ток выключали, и проволока остывала. Цилиндры приводились во вращение.

После достижения ими определенной угловой скорости снова включали ток. Теперь испаряющиеся атомы серебра образовывали полоску  $B$ .

Определите скорость теплового движения атомов серебра по данным, полученным О. Штерном в одном из опытов: цилиндры вращались со скоростью 2500 об/мин, радиус большого цилиндра 5 см, расстоя-

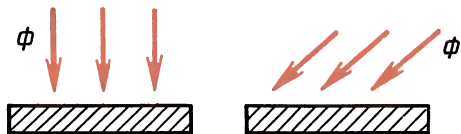


Рис. 93

ние между полосками  $A$  и  $B$  равно 1 мм.

Задача 23. (*Причуды маэстро.*)

И к тайне звуков приобщая,  
И ум, и сердце очищая,  
Нас музыкант повел с собой...

*Н. Шематенкова*

Почти у каждого из великих пианистов есть свои маленькие причуды. Непосвященному они незаметны, однако, проявив некоторую наблюдательность, мы можем открыть кое-какие странности, например, в том, как формирует программу своего концерта тот или иной пианист.

Присмотримся к программам последних четырех концертов одного известного пианиста. Им были исполнены произведения Бетховена, Брамса, Моцарта, Листа и Шопена. Для программы каждого концерта музыкант выбирал пьесы только четырех из этих пяти композиторов. Причем так, что не было двух концертов, где бы четыре композитора

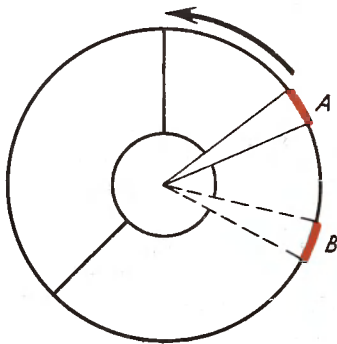


Рис. 94



исполнялись в одной и той же последовательности. Кроме того, Моцарт и Бетховен никогда не были представлены в одной программе. Однако если в какой-то вечер пианист не исполнял Бетховена, то тогда обязательно исполнялись произведения Моцарта и тотчас же за ними — произведения Шопена. Если же был исключен Моцарт, пианист заканчивал свой концерт пьесой Брамса. И наконец, у него было незыблемое правило: если в программе Брамс, то концерт начинается с Листа.

Зная, что первые три концерта этой серии выступлений заканчивались произведениями одного и того же композитора, установите, какие композиторы исполнялись в программе его последнего концерта и в какой последовательности они были представлены в этом концерте.

**Задача 24.** (*Музыкальный ребус.*) Требуется заменить на рисунке 95 ноты цифрами так, чтобы все указанные арифметические действия по горизонтали и вертикали и результаты были правильными.

Каждой ноте соответствует определенная цифра — одна и та же для одной и той же ноты в любой октаве и в любом ключе — скрипичном или басовом, но учитываются бемоли (b), диезы (#) и бекары (̣), так как основных нот в октаве семь, а цифр десять.



Рис. 95

Не из учебника задача,  
И потрудней открылся шифр.  
Ребята поняли, что значат  
Простые с виду десять цифр.

С. Щипачев

**Задача 25.** (*Три ребуса «со значением».*)

а) Восстановите пример, если  $\overline{Д^м} = \overline{МД}$  (двузначное число):

$$\begin{array}{r} \text{У Ч И С Ь} \\ \times \quad \text{С} \\ \hline \text{М О Л О Д У} \end{array}$$

б) Восстановите пример

$$\begin{array}{r} 1777 \\ + \quad \text{КАРЛ} \\ \hline \text{ГАУСС} \end{array}$$

1777 — год рождения великого математика Карла Гаусса,  
 $\overline{УС}$  — простое число

в) Восстановите пример, затем расставьте буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр и все гласные буквы замените буквой «О». Получится фамилия всемирно известного русского математика, академика, Героя Социалистического Труда:

$$\begin{array}{r} \text{ЛЕА} - \text{ГУ} = \text{ЕАЛ} \\ : \quad + \quad - \\ \text{Я} \quad \text{В} = \text{РЛ} \\ \hline \text{ЛР} + \text{АМ} = \text{ВК} \end{array}$$

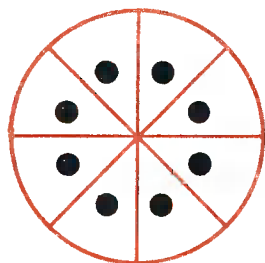


Рис. 96

Задача 26. («8 секторов» — игра без игровых действий.)

Круг разделен на 8 секторов, в каждом из которых стоит шашка (рис. 96). Одним ходом разрешается передвигать две шашки в соседние сектора: одну по ходу часовой стрелки, другую против. Цель: через несколько ходов собрать все шашки в одном секторе. Но прежде исследуйте, возможно ли достижение поставленной цели. Здесь рассуждения в союзе с арифметикой окажутся сильнее практических попыток.

Ах, тот, кто много мыслей  
Во лбу своем содержит,—  
Не вдруг решит — какая  
Из многих тысяч — лучше  
Для быстрого ответа.

Новелла Матвеева

Задача 27. («Да хоть кого смутят вопросы быстрые...» А. Грибоедов.)

1) Что больше: сумма всех цифр или их произведение?

2) Тело движется по прямой и за каждую секунду проходит путь, равный 1 см. Равномерно ли тело движется?

3) Тело движется равноускоренно под действием силы  $F$ . Каким

станет это движение, если сила  $F$  начнет уменьшаться?

4) Шутка. Казалось бы, лупа должна увеличивать все без исключения предметы, но все же существуют такие объекты, которые лупа не увеличивает. Что это за объекты?

5) Французская юмористическая загадка. Такое же большое, как Эйфелева башня, а не весит ни грамма. Что же это?

6) Можно ли достать воду из колодца глубиной  $h=12$  м с помощью насоса, расположенного на поверхности Земли и способного создавать в опущенной в колодец трубе сколь угодно низкое давление воздуха?

7) Электрическую плитку, рассчитанную на напряжение  $U_1=220$  В, требуется переделать, не заменяя и не укорачивая спираль, на напряжение  $U_2=110$  В так, чтобы ее мощность осталась прежней. Что нужно сделать? Дайте эскиз схемы плитки после переделки.

8) Есть кусок мягкой проволоки длиной около 20 см. Используя угольник, сложите из проволоки контур прямоугольника так, чтобы концы проволоки сходились в одной из вершин прямоугольника.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.  $2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$ . Множитель 1 не рассматриваем, так как по условию возраст каждого больше 1. Возможны такие варианты:

- 1)  $2 + 35 + 35 = 72$ ;
- 2)  $2 + 25 + 49 = 76$ ;
- 3)  $5 + 14 + 35 = 54$ ;
- 4)  $5 + 10 + 49 = 64$ ;
- 5)  $5 + 7 + 70 = 82$ ;
- 6)  $5 + 5 + 98 = 108$ ;
- 7)  $7 + 10 + 35 = 52$ ;
- 8)  $7 + 25 + 14 = 46$ ;
- 9)  $7 + 7 + 50 = 64$ .

Сразу отпадают те варианты, в которых сумма чисел не делится на 4; остаются лишь варианты 1, 2, 4, 6, 7 и 9.

Но в вариантах 4 и 9 суммы чисел одинаковы, так что неясно, какой из них мог бы подойти, и ученик попросил сообщить ему еще что-либо. Владимир Андреевич, видимо, согласился с тем, что выбрать надо один из этих вариантов, так как дал дополнительную информацию.

Значит, ученику  $64 : 4 = 16$  лет, а старшему из встретившихся либо 49 лет, либо 50. Владимир Андреевич сказал, что каждый из троих моложе его, после чего ученик решил задачу. А это возможно лишь в том случае, когда Владимиру Андреевичу 50 лет, значит, вариант 9 отпадает. Знакомым Владимира Андреевича 5, 10 и 49 лет.

2. Пусть учитель родился в  $\overline{19xy}$  году. В 1964 году ему исполнилось  $1 + 9 + x + y$  лет. Возраст учителя можно найти, вычтя из 64 (все происходит в одном столетии)  $10x + y$ . Получаем уравнение  $54 = 11x + 2y$ . Возможно только одно решение:

$$x = 4, y = 5.$$

Учитель родился в 1945 году. В 1964 году ему было 19 лет.

3. 13 раз:

1.1.11,  
2.2.22,  
3.3.33,  
4.4.44,  
5.5.55,  
6.6.66,  
7.7.77,  
8.8.88,  
9.9.99,  
11.1.11,  
1.11.11,  
11.11.11,  
22.2.22.

4. Пусть  $x$  — первоначальное делимое,  $y$  — первоначальный делитель,  $q$  — частное,  $r$  — остаток. По условию  $x = q \cdot y + r$ . Замена цифры десятков 3 на 8 означает увеличение делимого на 50, соответственно в делителе замена цифры единиц 4 на 9 означает увеличение делителя на 5. Значит,

$$x + 50 = q(y + 5) + r.$$

Сопоставляя оба равенства, получаем  $50 = 5 \cdot q$ , откуда  $q = 10$ .

5.  $63^9 < 64^9 = 2^{54}$ ,  $33^{11} > 32^{11} = 2^{55}$ . Так как  $2^{55} > 2^{54}$ , то тем более  $33^{11} > 63^9$ .

$$6. 207^{208} = (207^4)^{52} = (\dots 1)^{52} = \dots 1.$$

$$209^{210} = (209^2)^{105} = (\dots 1)^{105} = \dots 1.$$

$$7. 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ и, чтобы}$$

это число оканчивалось цифрой 7,  $k(k+1)$  должно оканчиваться цифрой 4, чего быть не может, так как непосредственно легко проверить, что такое произведение может оканчиваться лишь на 0, 2, 6.

8. Отметим все точки пересечения проведенной прямой (рис. 97) с границами клеток шахматной доски. Отмеченные точки разбивают образовавшийся отрезок прямой на несколько конечных отрезков (отрезочки, исходящие из первой и последней из отмечен-

ных точек, рассматривать не будем). Каждый отрезок проходит по одной и только одной клетке шахматной доски. Следовательно, сосчитав конечные отрезки, мы узнаем, сколько клеток пересекает проведенная прямая.

Шахматная доска разделена на клетки 18 прямолинейными отрезками: 9 вертикалями и 9 горизонталями. С каждой из них проведенная прямая может пересекаться лишь в одной точке, но из четырех отрезков, служащих краями доски, она пересекается лишь с двумя. Следовательно, на проведенной прямой может быть самое большее 16 отмеченных точек, которые разбивают ее не более чем на 15 отрезков.

Таким образом, любая прямая, проведенная на шахматной доске, может пересекать не более чем 15 клеток. Проведя прямую, параллельную любой из диагоналей на шахматной доске, так, чтобы она проходила через середины сторон двух угловых клеток, мы получим прямую, которая пересекает 15 клеток. Итак, любая прямая, проведенная на шахматной доске, может пересекать не больше чем 15 клеток.

9. 6; 18; 54. Пусть в некоторый момент

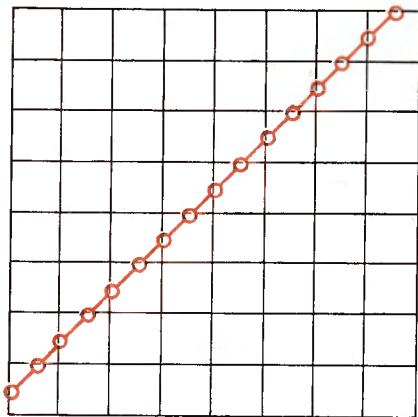


Рис. 97

мы нашли сумму всех написанных чисел, равную  $a$ . При следующем шаге каждое из этих слагаемых складывается с соседним дважды. Значит, вновь написанные числа дадут в сумме  $2a$ , а сумма всех чисел будет  $2a + a = 3a$ .

10. Умножим обе части равенства (4) на  $\frac{(A+B)^n}{(A+B+C)^n}$  и после очевидных преобразований получим:

$$(A+B)^n = \left( \frac{A(A+B+C) + B \cdot C}{A+B+C} \right)^n + \left( \frac{A \cdot C + B(A+B+C)}{A+B+C} \right)^n,$$

$$(A+B)^n = \left( A + \frac{B \cdot C}{A+B+C} \right)^n + \left( B + \frac{A \cdot C}{A+B+C} \right)^n,$$

наконец,

$$(A+B)^n = (A + M \cdot B)^n + (B + M \cdot A)^n,$$

где

$$M = \frac{C}{A+B+C}.$$

11. Сумма внутренних углов данного многоугольника равна  $2d \cdot 1916$ . Сумма углов при «внутренних» вершинах треугольников, т. е. при вершинах в изюминках, равна  $4d \cdot 41$ . Сумма углов всех полученных треугольников равна

$$2d \cdot 1916 + 4d \cdot 41 = 1998 \cdot 2d.$$

Значит, всего треугольных кусков получилось  $\frac{1998 \cdot 2d}{2d} = 1998$ . Столько же учеников в трех школах района. Число учащихся в

каждой школе, по-видимому, трехзначное, но есть только одно трехзначное число 666, которое увеличивается в полтора раза без арифметических действий: достаточно повернуть число 666 на  $180^\circ$  — и получится 999.

В соответствии с условием можно предположить, что в каждой из трех школ одинаковое число учащихся — 666. Действительно,  $666 \cdot 3 = 1998$ .

12. На рисунке 98 точка  $S$  — середина расстояния между точками 1 и 2, где зарыто сокровище. Из этих точек и точки «бук» проведены перпендикуляры к прямой «дуб — дуб». Из равенства прямоугольных треугольников с общей вершиной «дуб» слева следует  $a = b$ . Из равенства прямоугольных треугольников с общей вершиной «дуб» справа

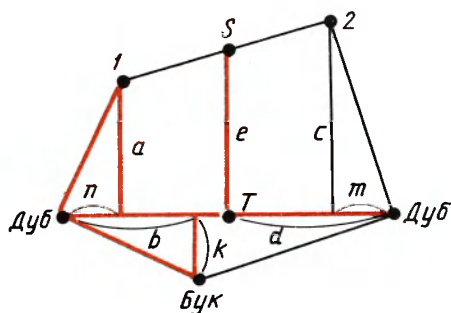


Рис. 98

следует  $c=d$ . Расстояние  $l = \frac{a+c}{2}$  и должно, следовательно, быть равно половине расстояния между дубами. Далее, так как  $n=k$  и

$$\begin{aligned} \angle AP_1B &= \angle P_1AA_1 + \angle P_1A_1A = \\ &= \angle B_1AC_1 + \angle C_1AA_1 \left( = \frac{\pi}{4} \right) + \angle C_1A_1A \left( = \frac{\pi}{4} \right) - \angle BA_1C_1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Значит  $\triangle AP_1B$  прямоугольный с гипотенузой  $AB$ .

Аналогичные построения, связанные с пальмами  $C_2$  и  $C_3$ , очевидно, приведут к образованию других прямоугольных треугольников:

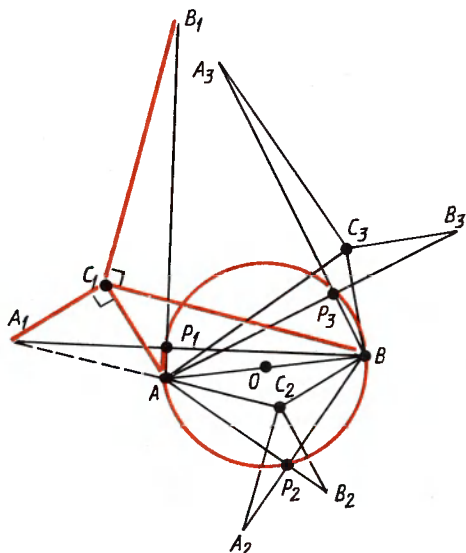


Рис. 99

$m=k$ , то  $n=m$ , поэтому точка  $T$  должна лежать на середине расстояния между дубами. Как видим, для практического решения задачи бук не нужен; юнга просто протянул веревку между дубами и отшагал от середины между ними расстояние, равное половине длины веревки, перпендикулярно ее протяжению.

13. Выполнив построения, связанные с пальмой  $C_1$  (рис. 99), рассмотрим треугольники  $AC_1B_1$  и  $BC_1A_1$ . По условию две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого и  $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$  (каждый равен  $\frac{\pi}{2} + \angle AC_1B$ ), следовательно,  $\triangle AC_1B_1 = \triangle BC_1A_1$ , откуда  $\angle B_1AC_1 = \angle BA_1C_1$ ;  $\angle AP_1B$  — внешний для треугольника  $AP_1A_1$ , поэтому

ков:  $AP_2B$  и  $AP_3B$  с общей гипотенузой  $AB$ . Следовательно, их вершины ( $P_1, P_2, P_3$ ) должны лежать на одной окружности, диаметр которой —  $AB$ . Поэтому середина  $O$  промежутка между камнями ( $A$  и  $B$ ) и есть место, где зарыто сокровище. Пальмы как ориентиры оказались ненужными.

14. 1) Пусть  $a$  и  $b$  — длины оснований трапеции  $ABCD$  (рис. 100). Если  $EF$  — средняя линия трапеции, то  $EF = \frac{a+b}{2}$  — среднее арифметическое  $a$  и  $b$ .

2) Пусть  $EF \parallel BC \parallel AD$  и делит  $ABCD$  на две подобные трапеции  $BCFE$  и  $EFDA$  (рис. 101). Тогда

$$a:EF = EF:b,$$

откуда  $EF = \sqrt{a \cdot b}$  — среднее геометрическое  $a$  и  $b$ .

3) Пусть  $EF \parallel BC \parallel AD$  и  $EF$  проходит через  $M$  — точку пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  (рис. 102). Тогда

$$\frac{EM}{a} = \frac{AM}{AC} \text{ и } \frac{MF}{b} = \frac{MD}{BD}; \quad \frac{a}{b} = \frac{MC}{AM} = \frac{BM}{MD} \quad \text{или}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{AC}{AM} = \frac{BD}{MD};$$

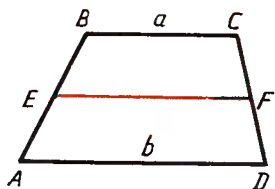


Рис. 100

$$EM = a \cdot \frac{AM}{AC} = \frac{ab}{a+b}, \quad (1)$$

$$MF = a \cdot \frac{MD}{BD} = \frac{ab}{a+b}. \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), получаем:

$$EM + MF = EF = \frac{2ab}{a+b},$$

или

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

т. е.  $EF$  — среднее гармоническое  $a$  и  $b$ .

15. Пользуясь циркулем и линейкой, легко построить угол, равный удвоенному данному. Поэтому, прибавив к начерченному углу в  $19^\circ$  такой же угол 18 раз, получим угол, равный  $361^\circ$ , т. е. полный угол и еще  $1^\circ$ . Таким образом и будет построена как раз  $\frac{1}{19}$  часть данного угла.

16. Доказано только то, что отрезки  $A_k A_{k+1}$  и  $B_k B_{k+1}$  с одинаковыми индексами никогда не пересекутся, но из этого не следует, что не могут пересечься, например, отрезки  $A_3 A_4$  и  $B_7 B_8$ .

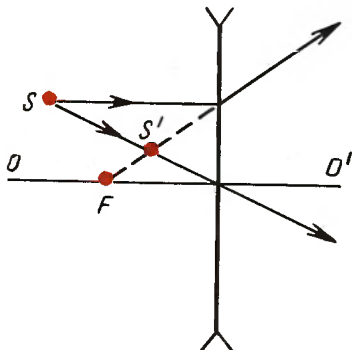


Рис. 103

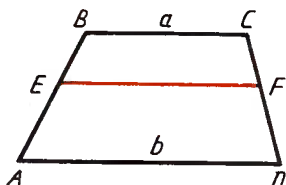


Рис. 101

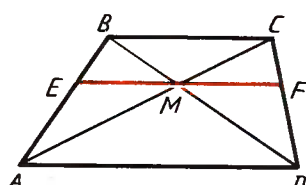


Рис. 102

17. Истинная глубина водоема  $H = \eta \cdot h = 1,2$  м.

$$18. \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ.$$

19. Построение выполнено на рисунке 103. Дайте выполненному построению объяснение, основанное на законах оптики.

20. На рисунке 104 представлен график зависимости скорости поезда  $v$  от времени  $t$ . Полагаем длины вагонов одинаковыми. Значит, путь  $S_1$ , пройденный предпоследним вагоном за время  $t_1$ , равен пути  $S_2$ , пройденному последним вагоном за время  $t_2$ . Численно  $S_1$  и  $S_2$  выражаются площадями соответствующих трапеций на рисунке ... Приравняв  $S_1$  и  $S_2$ , находим искомое время опоздания студента:

$$\frac{at + a(t+t_1)}{2} \cdot t_1 = \frac{a(t+t_1+t_2)}{2} \cdot t_2,$$

$$t = \frac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 31 \text{ с.}$$

21. Освещенность площадки в обоих случаях одинакова:  $E_1 = E_2 = \frac{\Phi}{S}$ ; световой по-

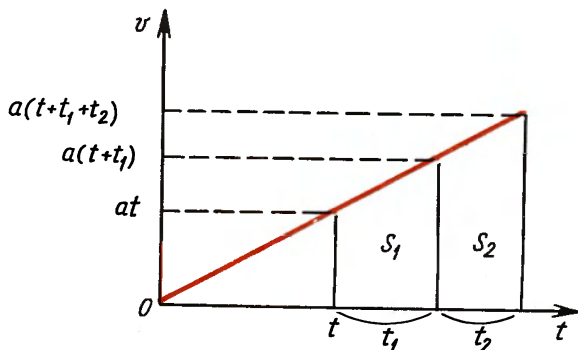


Рис. 104

ток — скалярная величина, и угол  $\alpha$  здесь ни при чем.

$$22. \text{ Длина дуги } AB = \omega R t, R = v \cdot t, AB = \frac{\omega R^2}{v}, v = \frac{\omega R^2}{AB} = \frac{2\pi \cdot 2500 \cdot 25}{60 \cdot 0,1} \approx 654 \text{ м/с.}$$

23. Бетховен и Моцарт друг друга исключают, поэтому в каждом концерте обязательно присутствуют Брамс, Шопен и Лист. Раз Брамс включен в каждую программу, значит, каждая из них начинается Листом. Представим программы, в которых Бетховен исключен. В этом случае пьеса Шопена тотчас же последует за пьесой Моцарта.

Таким образом, программы могут быть составлены двумя способами: Лист, Моцарт, Шопен, Брамс или Лист, Брамс, Моцарт, Шопен.

Если же исключить Моцарта, то концерт заканчивается Брамсом. Тогда программа может быть составлена так: Лист, Бетховен, Шопен, Брамс или Лист, Шопен, Бетховен, Брамс.

Нам известно, что три первых концерта оканчивались произведением одного и того же композитора, каковым является Брамс. Следовательно, комбинация Лист, Брамс, Моцарт, Шопен и представляет собой программу последнего концерта.

24. Переведем ребус на более удобную для анализа буквенную запись: ми — А, си b — Б, ре — В, ми b — Г, фа — Д, соль — Е, ля — Ж, до # — З, фа # — И, до — К. Тогда ребус принимает такой вид:

$$\begin{array}{r} \text{А Б В} - \text{Б Г Д} = \text{Д Б А} \\ : \quad + \quad - \\ \text{Е Б} \times \quad \text{Ж} = \quad \text{З Б} \\ \hline \text{И И} + \text{Б Г К} = \text{Б А Д} \end{array}$$

Во второй строке последняя цифра множимого (Б) повторяется в конце произведения. Это значит, что либо  $Б=5$ , а Ж — нечетное число, либо  $Ж=1$ , либо  $Ж=6$ . При  $Ж=6$  могут быть два случая:  $Б=2$  или  $Б=4$ . Но Б не может быть цифрой 5 хотя бы потому, что  $Д=Б+1$  (см. столбец вычитания справа) и тогда сумма  $\overline{ДБА} + \overline{БГД}$  была бы числом четырехзначным, а оно трехзначное ( $\overline{АБВ}$ ). Ж не может быть цифрой 1, так как (см.

вторую строку)  $\overline{ЕБ} \cdot 1$  может быть только  $\overline{ЕБ}$ . Следовательно, примем, что  $Ж=6$ . Тогда  $Б=2$  или  $Б=4$ . Сначала рассмотрим  $Б=2$ . Ребус принимает вид:

$$\begin{array}{r} \text{А 2 В} - \text{2 Г Д} = \text{Д 2 А} \\ : \quad + \quad - \\ \text{Е 2} \times \quad 6 = \quad 32 \\ \hline \text{И И} + \text{2 Г К} = \text{2 А Д} \end{array}$$

По последнему столбцу замечаем, что Д должно быть на 1 больше 2, т. е.  $Д=3$ , следовательно,  $А=5$ , и т. д. Последовательно заменяя буквы цифрами, получаем:  $А=5$ ,  $Б=2$ ,  $В=8$ ,  $Г=0$ ,  $Е=1$ ,  $З=7$ ,  $И=4$ ,  $К=9$ , и ребус принимает вид:

$$\begin{array}{r} 528 - 203 = 325 \\ : \quad + \quad - \\ 12 \times \quad 6 = 72 \\ \hline 44 + 209 = 253 \end{array}$$

Любопытно, что, поворачивая эту запись последовательно на  $90^\circ$  и не меняя порядка следования цифр, вновь получим правильные результаты. Например:

$$\begin{array}{r} 44 \times 12 = 528 \\ + \quad \times \quad - \\ 209 - \quad 6 = 203 \\ \hline 253 + 72 = 325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 253 - 209 = 44 \quad 325 - 72 = 253 \\ + \quad - \quad \times \quad + \quad : \quad - \\ 72 : \quad 6 = 12 \quad 203 + 6 = 209 \\ \hline 325 + 203 = 528 \quad 528 : 12 = 44 \end{array}$$

25. а) Равенство  $\overline{Д^М} = \overline{МД}$  верно только при  $М=2$ ,  $Д=5$ . Далее  $У=3$ ,  $С=7$  и т. д. Ответ: 30 879 · 7 = 216 153.

б)  $Г=1$ ,  $К=9$ ,  $А=0$  (см. выше разряды). Чтобы были одинаковыми последние две цифры результата, в разряде единиц должен быть переход через десяток. Вот таблица возможных случаев:

Л	С	Р
5	2	4
6	3	5
7	4	6



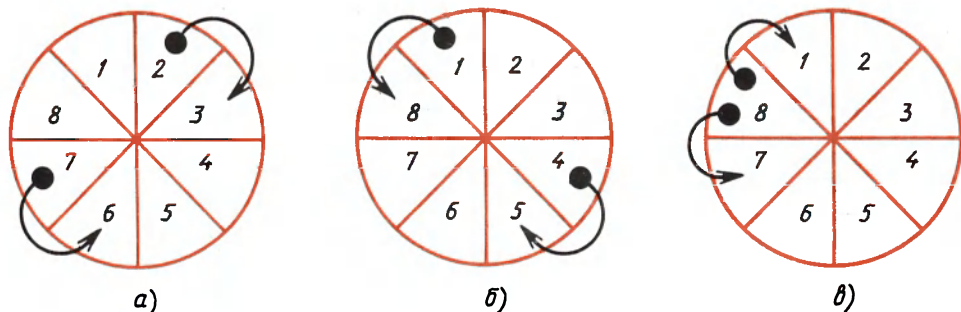


Рис. 105

В любом из этих случаев  $Y=8$ . С учетом дополнительного условия имеем:  $L=6$ ,  $C=3$ ,  $P=5$ .

КАРЛ=9056, ГАУСС=10 833.

в)

$$\begin{array}{r} 216 - 54 = 162 \\ : + - \\ 8 \times 9 = 72 \\ \hline 27 + 63 = 90 \end{array}$$

КОЛМОГОРОВ А. Н.

26. Придадим секторам номера от 1 до 8. Для каждого расположения шашек умножаем число шашек, стоящих в каждом секторе, на номер сектора и полученные 8 чисел складываем. Первоначальная сумма

$$1 + 2 + \dots + 8 = 36.$$

При всяком ходе эта сумма может меняться лишь тремя способами: а) остается прежней (рис. 105, а); б) увеличивается на 8 (рис. 105, б); в) уменьшается на 8 (рис. 105, в). Следовательно, рассматриваемая сумма всегда число вида

$$36 + 8 \cdot k, \text{ где } k=0, 1, 2, \dots$$

Число  $36 + 8 \cdot k$  на 8 не делится, но если все шашки соберутся в одном секторе, то рассматриваемая сумма кратна 8. Вывод: собрать все шашки в одном секторе не удастся.

27. 1) Сумма всех цифр отлична от нуля, а их произведение равно нулю.

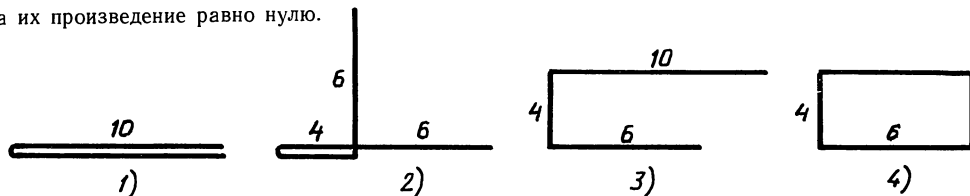


Рис. 106

2) Ничего определенного о равномерности этого движения сказать нельзя. Оно может быть равномерным, а может быть и неравномерным. Прохождение телом одного и того же расстояния за каждую секунду является необходимым, но недостаточным условием равномерности движения. Действительно, движение тела называется равномерным, если за любые равные промежутки времени тело проходит равные пути. Мы же не знаем, проходит ли тело за каждую  $\frac{1}{2}$  с по  $\frac{1}{2}$  см, за

каждую  $\frac{1}{12}$  с по  $\frac{1}{12}$  см и т. д.

3) Движение останется ускоренным. С уменьшением силы уменьшается ускорение, но оно все время направлено в ту же сторону, что и скорость, которая поэтому растет. Когда сила  $F$  сделается равной нулю, движение станет равномерным.

4) Луна не увеличивает углы, так как величины углов не зависят от длин их сторон.

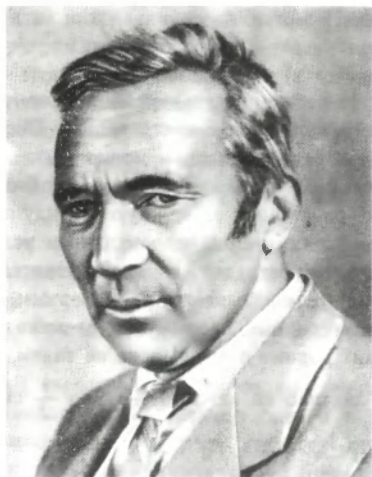
5) Тень от Эйфелевой башни.

6) Нет, нельзя.

7) Две половины спирали следует соединить параллельно.

8) Возможная последовательность сгибов показана на рисунке 106.

# «МОЯ ЖИЗНЬ БЫЛА ПРЕИСПОЛНЕНА СЧАСТЬЕМ» — АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ



А. Н. Колмогоров (1903—1987)

О, математики умелец! Не премину  
Я людям завтрашним похвастаться тобою.  
*Жак Рубо*

## «Острый» гений

Более полувека проводятся в нашей стране ежегодные математические олимпиады, одна из целей которых — приобщение увлеченных математикой к романтике истинного научного поиска. Одним из первых организаторов математических олимпиад был профессор Борис Николаевич Делоне. Как-то, выступая перед школьниками, он высказал мысль, что большое научное открытие отличается от хорошей олимпиадной задачи только тем, что для решения

олимпиадной задачи требуется 5 часов, а получение крупного научного результата требует затраты 5000 часов.

Конечно, сопоставление чисел 5000 и 5 является лишь примерной конкретизацией представления о том, что, как правило, много, иногда и очень много, времени длится творческий процесс действенных размышлений и поисков решений трудной или новой математической проблемы. Рассказывают, например, что всемирно известный геометр Д. Гильберт (в 1904 году он удостоен Международной премии имени Н. И. Лобачевского) на годы, а иногда и на десятилетия погружался в какую-то одну проблему или разработку одной теории.

Диаметрально иным творческим темпераментом обладал Андрей Николаевич Колмогоров — математический гений нашего времени, великий гражданин своей Родины.

С чувством некоторой неловкости и даже досады на себя Андрей Николаевич говаривал, что сам он никогда не мог длительно и концентрированно думать об одной и той же проблеме. На вопрос: «Как Вы работаете?» — был дан такой ответ:

— Вы читаете книжки, подготавливаете собственные лекции с какими-нибудь новыми вариантами, и вдруг на этой почве повседневной работы является какая-нибудь неожиданная идея и еще смутно виднеется какой-то другой путь. Тогда

чрезвычайно существенно забросить все остальное — и думать, думать без конца в одном только что возникшем направлении. На счастье у меня такая возможность обычно бывала, но мне во всей истории моих научных открытий так уж самозабвенно, отключившись от всего другого, приходилось работать неделю, иногда, может быть, две — не больше.

Не всегда уравнения  
Разрешают сомненья,  
Но итогом сомненья  
Может быть озаренье.

Действительно, Андрей Николаевич умел концентрировать огромную энергию на коротком отрезке времени. Возникавшие при этом озарения как «взрывное» завершение накапливавшихся предварительных размышлений приводили к открытиям поразительной красоты и глубины.

Продуктивное скородействие мысли, быстрота восприятия и осознания научной проблемы, присущие Андрею Николаевичу, восхищали его коллег и учеников.

Намереваясь оттенить эти качества, один из коллег Андрея Николаевича, используя как метафору математические термины «тупой» и «острый», как-то в шутку говорил об «острых» и «тупых» гениях, причисляя к последним Д. Гильберта, а к первым А. Колмогорова. Разумеется, не следует усматривать здесь какое-то противопоставление друг другу двух гениев, Андрей Николаевич Колмогоров мыслит быстро, Давид Гильберт — медленно, однако оба — экстраординарные ученые. Быстрота соображения — не строго обязательный компонент математического таланта, но предрасполагает к широте, всеохватности научных интересов.

## «Абсолютная вершина» в современной математике

Широта научного кругозора и разнообразие научных устремлений Андрея Николаевича уникальны. Несомненно впечатляет даже простое перечисление названий освоенных им современных разветвлений математической науки, обогащенных результатами его собственных исследований и открытий.

1. Метрическая теория функций.  
2. Дескриптивная теория множеств.  
3. Математическая логика. 4. Геометрия. 5. Функциональный анализ.  
6. Топология. 7. Дифференциальные уравнения. 8. Теория приближений.  
9. Турбулентность. 10. Теория стрельбы. 11. Теория алгоритмов и автоматов. 12. Динамические системы и классическая механика. 13. Суперпозиции. 14. Теория информации.  
15. Эргодическая теория. 16. Статистические методы в стиховедении.  
17. Теория вероятностей. 18. Случайные процессы. 19. Математическая статистика.

Притормозим короткий миг —  
Возможный ключ к высоким тайнам,  
Чтоб каждый таинство постиг  
Того, что мы зовем случайным.

И это еще не все области математики, к которым творчески причастен один человек — Андрей Николаевич Колмогоров! Существенную рубрику в его научных исследованиях составляют работы в области приложений математики в естествознании, науках о жизни, о Земле — физике, биологии, геологии, океанологии, кристаллографии...

Значительным по практической приложимости вкладом в естественные науки явилось, например, открытие Андреем Николаевичем нового закона природы — о движении жид-

костей и газов, рассматриваемом как «случайный процесс» (проблема турбулентности).

Открытие, названное *законом двух третей*, сразу же получило широкую известность. Суть кратко такова: в турбулентном течении (при определенных условиях) средний квадрат разности скоростей в двух точках на расстоянии  $r$  — не очень большим и не очень малом — пропорционален  $r^{2/3}$ .

Одним из важнейших практических использований теории случайных процессов является предсказание будущего по наблюдению над процессом в течение какого-то времени. Разработка теории в этом направлении, начатая Андреем Николаевичем и продолженная американским математиком Норбертом Винером («отец» кибернетики; его книга «Я — вундеркинд» общедоступна для понимания), нашла множество применений в различных областях науки и техники.

Поразительно, какой живучестью обладали идеи Андрея Николаевича. Они быстро подхватывались другими исследователями, сплетаясь, образовывали научные направления и школы.

Большой резонанс получил развитый Андреем Николаевичем метод решения функциональных уравнений (искомым является функция) с малыми знаменателями — особый род теоремы о неявной функции. Возникшая теория была далее углублена в работах талантливейшего ученика Андрея Николаевича — профессора МГУ Владимира Игоревича Арнольда и американского математика Ю. Мозера и потому получила название *КАМ-теории*, теории Колмогорова — Арнольда — Мозера.

Андрей Николаевич имеет труды по вопросам философии, методологии науки, истории естествознания.

Дух захватывает, когда читаешь в БСЭ его блестящую научно-популярную статью «Математика». Большое число его работ посвящено проблемам школьного и вообще математического образования... Список трудов, пока еще не полный, насчитывает около 500 работ!

Благословенна сладостная мука  
Трудов моих! Я творчеству отдам  
Всю жизнь мою...

*И. Бунин*

«Абсолютная вершина в современной математике» — удачная метафора академика Б. В. Гнеденко, точно характеризующая творческий облик Андрея Николаевича Колмогорова, одного из замечательнейших математиков нашего века.

## Под крылышком родной тетушки

Мама Андрея Николаевича — Мария Яковлевна Колмогорова — умерла в день рождения сына — 25 апреля 1903 года.

Имя дали по желанию, заранее высказанному мамой: если родится мальчик, назвать Андреем в честь Андрея Болконского, любимого ею литературного персонажа из романа Л. Н. Толстого. Отец Андрея — Николай Матвеевич Катаев — агроном и немного балетрист. Будучи еще холостяком, он участвовал в движении народников и в начале века был выслан в Ярославль, где стал работать земским статистиком. Там он и познакомился с Марией Яковлевной Колмогоровой — дочерью крупного помещика Я. С. Колмогорова. Знакомство сблизило их. Мария соглашается стать женой Николая Матвеевича, вопреки воле родителей, и покидает отчий дом. Так как Мария и Николай обвен-

чаны не были, то родившийся у них мальчик — Андрей — считался незаконнорожденным и не имел права ни на отчество по родному отцу, ни на фамилию его. И лишь после Октябрьской революции по новым законам он смог получить фамилию мамы и отчество по отцу. Заботы об Андрее взяла на себя сестра его мамы — Вера Яковлевна, усыновившая мальчика. Большое участие в его воспитании принимали и другие сестры Марии, особенно Надежда Яковлевна Колмогорова.

Первые годы жизни Андрей провел в имении деда — Туношине, — расположенном на берегу одного из притоков Волги недалеко от Ярославля. Тетушки одарили мальчика любовью, лаской, вниманием, трогательной заботой о его интеллектуальном и нравственном воспитании. Все старались развить в ребенке любознательность и интерес к книгам, наукам, природе. Вера Яковлевна водила мальчика по полям и лесам, рассказывая о деревьях, цветах, травах. Поздними вечерами она показывала Андрею звездное небо, называла созвездия и отдельные яркие светила, рассказывала о мироздании. Читала сказки Пушкина, Андерсена, Афанасьева, Сельмы Лагерлеф, былины о богатырях, стихотворения. Безусловно мальчик и его тетя-мама восхищались таким, например, шедевром русской поэзии:

Где гнутся над омутом лозы,  
Где летнее солнце печет,  
Летают и пляшут стрекозы,  
Веселый ведут хоровод.

«Дитя, подойди к нам поближе,  
Тебя мы научим летать,  
Дитя, подойди, подойди же,  
Пока не проснулась мать!

Под нами трепещут былинки,  
Нам так хорошо и тепло,

У нас бирюзовые спинки,  
А крылышки точно стекло!

Мы песенку знаем так много,  
Мы так тебя любим давно —  
Смотри, какой берег отлогий,  
Какое песчаное дно!»

*А. К. Толстой*

Сестры Колмогоровы — Вера Яковлевна и Надежда Яковлевна — были типичными представителями русской демократической интеллигенции. В их туношенском доме была устроена маленькая школа, в которой велись занятия с десятком детей разного возраста «по новейшим рецептам педагогики того времени». В школе издавался рукописный журнал «Весенние ласточки». Пятилетнему Андрею был поручен математический раздел. Всего вышло четыре номера журнала, но до наших дней они не сохранились.

«Творческую радость математического открытия я познал рано, — писал впоследствии Андрей Николаевич, — подметив в возрасте 5—6 лет закономерность:

$$1 = 1^2, 1 + 3 = 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \text{ и т. д.}.$$

Это открытие Андрея, разумеется, было опубликовано в «Весенних ласточках». Там же он помещал придуманные им задачи. Например, такую: «Сколькоими способами можно пришить пуговицу, имеющую 4 дырочки?»

В доме Колмогоровых Андрея приучали к труду: мальчик заготавливал дрова на зиму, собирая сучья в саду, участвовал в сельскохозяйственных работах, пришивал пуговицы к своей одежде. Так что задача о пуговицах происходила «из практики». Для решения задачи считалось обязательным, чтобы ни одна дырочка не оставалась свободной. Андрею

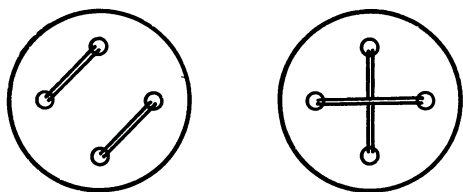


Рис. 107

особенно нравились два способа: двумя параллельными черточками и крестиком (рис. 107).

### Когда обучение не муштра, а творенье

С 1910 года Вера Яковлевна и Андрей поселились в Москве. Мальчик был определен в частную гимназию Е. А. Репман. Во многом эта школа была необычной: совместное обучение мальчиков и девочек (таких гимназий в Москве было только две); текущие оценки не выставлялись; по предметам, к которым ученик проявлял повышенный интерес, можно было заниматься совместно с теми, кто был на класс старше. Преподаватели старались заметить и поддержать проявление одаренности, развить в своих воспитанниках свободомыслие и стремление к познанию, самостоятельность.

К прогрессивным формам обучения и тогда начальство относилось с подозрением, гимназия все время находилась под угрозой закрытия. Может быть, поэтому, по словам Андрея Николаевича, «отличные успехи на экзаменах с представителями от округа воспринимались всеми учениками как дело долга и чести».

Гимназия Репман просуществовала около 10 лет. Из ее питомцев впоследствии сформировалось немало замечательных ученых разных специальностей. Андрей Николаевич с благодарностью вспоминал препода-

вательницу литературы и русского языка, преподавательницу французского языка, которой удавалось знакомить учеников с произведениями классической и современной литературы, обучая одновременно художественному переводу; она вела с учениками философские и нравственные беседы на французском языке. Преподавательница истории, продолжал свои воспоминания Андрей Николаевич, давала очень много в смысле подлинно научного подхода. Преподавательница латыни также не ограничивалась лишь чтением текстов, а насыщала уроки рассказами о римской культуре и истории, давала психологические портреты ее деятелей, поэтов и ученых. Андрей Николаевич на всю жизнь сохранил чувство глубокой признательности преподавателям своей гимназии.

Выросший в обществе своих тетушек, Андрей особенно высоко ценил в своих школьных друзьях те черты мальчишества, которых сам был, как ему казалось, в значительной мере лишен, — озорство, удаль, отвагу, ловкость, спортивность.

Исключительно широк был круг интересов у гимназиста Андрея. Всерьез увлекался биологией. От чтения книги К. А. Тимирязева «Жизнь растений» он получил «первое большое впечатление силы и значительности научного исследования». Возникла мечта стать лесоводом. Увлекался физикой и математикой — в возрасте 14 лет он самостоятельно изучил основы высшей математики по энциклопедии.

Увлекался историей и социологией — задумывался над организацией государства-коммуны на одном из необитаемых островов и даже сочинил конституцию для такого государства, где должны были осуществляться принципы высшей спра-



ведливости. Любил играть в шахматы.

Из-за грозных событий революции 1917 года и последовавших трудных лет процесс завершения Андреем среднего образования оказался скомканным. Пришлось искать заработок.

В 1919 году к составу поезда, курсировавшего по маршруту Казань — Екатеринбург, прицеплялся вагон с библиотекой. На разных полустанках его отцепляли и оставляли на некоторое время. Андрей стал библиотекарем, а заодно и истопником этого вагона. Одновременно он усердно занимался, готовясь сдать экстерном экзамены за среднюю школу. Но не пришлось — летом 1920 года Андрею без всякого экзамена выдали аттестат об окончании школы 2-й ступени № 23 (так была переименована гимназия Репман).

И вновь проблема: где, в каком вузе продолжить свое образование? Суждено ли осуществиться неумному желанию стать ученым? И какую науку выбрать? Может быть, историю? Ведь именно сильное увлечение историей еще в школьные годы побудило Андрея к самостоятельной научной разработке темы «Новгородское землевладение XV века». На эту тему семнадцатилетний юноша сделал свой первый научный доклад в Московском университете на семинаре известного историка, профессора С. В. Бахрушина.

Работа содержала новый подход к анализу «писцовых книг XV—XVI веков» с применением приемов математической теории. Любопытно, что уже здесь явственно проступает стиль мышления математика: подчеркнутое внимание к поиску точных определений, стремление обосновать обнаруженные закономерности.

Профессор Бахрушин признал ценность этой работы и ободрил начинающего исследователя. Но когда

юноша спросил профессора, нельзя ли ему опубликовать свой результат, он получил такой ответ: «Ну, что Вы, молодой человек! Вы же нашли пока только одно доказательство. Для историка этого мало. Нужно по меньшей мере пять доказательств». Возможно, что разочарование, испытанное в эту минуту, и повлияло на решительный поворот его устремлений в сторону математики, где для установления истины достаточно одного доказательства.

Итак, на штурм математики! И вновь сомнения... А может быть, нужнее сейчас практики-инженеры, а не ученые-теоретики?

Однако раздумья и колебания были недолгими. Андрей зачисляется одновременно на физико-математический факультет МГУ (без экзамена) и на металлургический факультет Московского химико-технологического института (по собеседованию).

Конечно, в первый же год обучения определился окончательный выбор — взяла верх сила притяжения высокоинтеллектуальной творческой среды физмата МГУ. Или, как объяснял этот выбор сам Андрей Николаевич, «скоро интерес к математике перевесил сомнения в актуальности профессии математика».

Так, с 1920 года вся деятельная жизнь Андрея Николаевича неразрывно связана с МГУ. А Вера Яковлевна, живя вместе с ним, заботливо заменяла ему мать вплоть до своей кончины в 1950 году.

## В науку!

Запас знаний, с которыми Андрей начал учиться на первом курсе, помог ему быстро усвоить преподаваемый материал и досрочно сдать сразу два экзамена (по «теории мно-



жеств» и «проективной геометрии»). Это дало Андрею статус студента второго курса и в дополнение к весьма скромной стипендии повышенный продовольственный паек — «пуд (16 кг) хлеба и 1 кг масла в месяц», что по трудным первым после-революционным годам означало уже полное материальное благополучие.

— Одежда у меня была,— вспоминал Андрей Николаевич,— а туфли на деревянной подошве я изготовил себе сам.

Профессорский состав — крупные ученые, атмосфера творческого подъема, исканий, надежд. Главной фигурой среди математиков в те годы, центром притяжения большинства любознательных студентов был профессор Николай Николаевич Лузин — создатель научной математической школы, названной впоследствии «московской школой» и получившей мировое признание.

Это была пора расцвета школы Лузина. Студенческий и аспирантский коллективы — участники оживленных семинаров и теплых непринужденных бесед-общений с Николаем Николаевичем Лузиным — называли себя Лузитанией. Лузитания была действительно уникальным и неповторимым коллективом молодежи, жившей радостной, веселой, но и напряженной, насыщенной математической жизнью.

Сразу вошел в эту среду и Андрей Колмогоров. Началось же все с такого эпизода. Андрей регулярно посещал лекций Н. Н. Лузина по теории аналитических функций. Николай Николаевич любил импровизировать на лекциях. Однажды на лекции для доказательства некоторой теоремы (теоремы Коши) ему пришла в голову мысль опереться на вспомогательное, чисто геометрическое утверждение, которое он тут же сочинил и предложил студентам

самостоятельно доказать его справедливость. А через две недели студент Колмогоров доложил на математическом кружке свое обоснование ошибочности высказанного профессором утверждения. Скажем словами А. Блока:

Он, утверждая, отрицал,  
И утверждал он отрицающ...

«Николай Николаевич признал правильным мое опровержение,— вспоминает Андрей Николаевич,— а для теоремы Коши дал в последующих лекциях правильное доказательство... Позже Н. Н. Лузин с некоторой торжественностью пригласил меня в число своих учеников...

Тем временем,— продолжает Андрей Николаевич,— летом 1921 года мною был получен результат, заслуживший всеобщее внимание в международных кругах специалистов по метрической теории функций,— я построил почти всюду расходящийся ряд Фурье».

С этой поры и следует исчислять начало его необыкновенной по интенсивности и плодотворности творческой биографии, продолжавшейся непрерывно 65 лет!

Стипендии, конечно, не хватало для жизни вдвоем с тетей Верой даже при очень скромных запросах. И в течение трех лет своего студенчества (1922—1925 гг.) Андрей работал преподавателем математики и физики в одной из опытно-показательных школ Наркомпроса РСФСР, где учились в основном дети фабричных рабочих. При этом он принимал самое активное участие в жизни школы — был секретарем школьного совета и воспитателем в интернате. Всегда с душевной теплотой он вспоминал работу со школьниками в тот период.

Это — жизни чистые истоки:  
Школа, сад на берегу реки,

Игры, дружба, чтение, уроки,  
Парты, доски, лестницы, звонки.  
Это — перед чистою доскою  
Человек стоит — и свеж, и чист,—  
Твердый мел крошится под рукою,  
Выводя колонки древних числ.  
Это — наш учитель, наш наставник,  
Тот, кого я так боготворю,  
Перед нами раскрывает ставни  
Окон, выходящих на зарю.

*Леонид Вышеславский*

## **О, математика анархии, как беспощаден твой расчет**

Идет 1925 год. А. Н. Колмогоров — аспирант Н. Н. Лузина. Начало творчества в области теории вероятностей в сотрудничестве с другим учеником Лузина — А. Я. Хинчиным.

Позже год за годом Андрей Николаевич добивался все новых и новых результатов в этой области математики. Подобно Евклиду в геометрии, он разработал аксиоматику для теории вероятностей и тем самым ввел эту «науку о случайном», или, как называл ее Якоб Бернулли (XVII в.), «искусство предположений», полноправным членом в семью математических дисциплин. Его самое известное научное произведение — книга «Основные понятия теории вероятностей», изданная в 1933 году, — положило начало современному периоду истории развития теории вероятностей. Выдающиеся математики нашего века Дуб и Ито откровенно признавали огромное влияние этой книги А. Н. Колмогорова на их личные творческие успехи в теории вероятностей. В мировой литературе одна из антологий по теории вероятностей озаглавлена так: «Бернулли, Лаплас, Колмогоров».

В теории вероятностей, матема-

тической статистике, в теории случайных процессов Андрей Николаевич сам, а затем и его «школа» с очень сильными учениками заняли лидирующее положение в мировой науке. В науку о вероятностях прочно внедрилось «неравенство Колмогорова». Андрей Николаевич доказал одно из самых фундаментальных положений в математической статистике. «Критерий согласия Колмогорова» вошел теперь во все учебники по математической статистике.

Александр Блок сказал:

Тебе дано бесстрашной мерой  
Измерить все, что видишь ты.  
Твой взгляд — да будет тверд и ясен.  
Сотри случайные черты —  
И ты увидишь: мир прекрасен!

В нравственно-поэтическом ключе «случайные черты» — значит не сопрягаемые с волей Высшего Разума. Но, как знать, не такова ли тайная природа и той случайности (событий, явлений, процессов), к познанию «бесстрастной меры» которой направлены усилия наук о вероятности? А нравственная цель этих наук все та же: помочь увидеть — «мир прекрасен»!

И ведь действительно, вопрос о природе случайных явлений систематически занимал Андрея Николаевича в последние годы его жизни. К сожалению, разработку этой интереснейшей проблемы он не успел довести до логического конца, оставив дело завершения начатых им исследований своим ученикам и последователям.

С отличным лаконизмом и сочностью характеризует суть теории вероятностей *Юлиан Тувим* (Польша):

О, математика анархии,  
Как беспощаден твой расчет!

Поэт *Луи Ле Кенф* с галантно-стью, положенной французу, предла-

гает на тему о случайности свое изящно-ироничное «Опровержение»:

Случайно все — философ учит нас.  
Случаен моего рожденья час,  
Случаен век и место, где родился я,  
И сам я только тень в пустыне бытия.  
И небо — из одной холодной пустоты,  
И незачем к нему стремить свои мечты,  
И жизнь — случайных дней слепая череда  
Всего лишь навсего — дорога в никуда.  
Мы встретились с тобой.  
И мне открылась тайна:  
Я знаю, что ничто на свете  
Не случайно.

*Перевод Н. Разговорова*

Если же отнестись к стихотворению всерьез, то придется признать, что не открылась поэту «тайна» (истина). Словно бы отвечая поэту, говорит об этом академик Б. В. Гнеденко: «Отрицание случайного не может превратить случайное в необходимое, оно остается и играет центральную роль в познании окружающего нас мира».

28 лет было Андрею Колмогорову, когда он получил звание профессора, а через 8 лет после этого был избран действительным членом Академии наук СССР. Кафедру теории вероятностей он возглавлял более тридцати лет (с 1935 по 1966 г.).

## **Пик расцвета математики и факультета**

Шесть лет — с 1933 по 1939 год, а позже еще два года, занимая пост директора Института математики и механики при МГУ, главной своей работой Андрей Николаевич считал повышение научного уровня аспирантуры мехмата. Все аспиранты мехмата 30-х годов отмечали исключительную роль Андрея Николаевича в их собственной научной судьбе: он комментировал работы, выполняе-

мые аспирантами вне зависимости от тематики работы, помогал, направлял, ставил задачи. Замечательная научная атмосфера тех лет во многом определялась деятельностью и личностью Колмогорова.

Он основал на мехмате много новых кафедр. Написал несколько статей для Большой советской энциклопедии, замечательных по содержанию, сочетающих краткость с полнотой, глубину мыслей с совершенством стиля.

В годы Великой Отечественной войны он радикально — с современных научных позиций — преобразовал теорию стрельбы и бомбометания, внеся, несомненно, серьезную лепту в грядущую победу.

Зима 1942 года была холодная, помещения не отапливались. Новый прием студентов на первый курс мехмата составил всего две группы по 25 человек. Андрей Николаевич вел лекционный курс и практические занятия без пальто. Запомнилось студентам, что к его пиджаку был приколот орден Трудового Красного Знамени.

В это же трудное время наконец-то завершилась холостяцкая жизнь 39-летнего Андрея Колмогорова. Доброй спутницей его жизни стала женщина, которая была однокурсницей Андрея в той же гимназии Е. Репман. И вот только через четверть века судьба их сблизила в одну семью.

По ее воспоминаниям, Андрей был гимназистом очень сосредоточенным, постоянно о чем-то думающим, на вид очень не спортивным, домашним, бледным-бледным. Но когда они вновь встретились через много лет, перед ней предстал загорелый, стремительный, крепкий мужчина, почувствовавший себя вправе предложить ей руку и сердце.

В дружбе и согласии они про-

жили совместно более 40 лет. Анна Дмитриевна — жена Андрея Николаевича — пережила его только на один год.

Значительными, счастливыми событиями в истории МГУ (в январе 2005 года ему исполнится 250 лет), в частности в приобретении мехматом и всей московской научной математической школой высочайшего престижа, явились, во-первых, назначение в 1951 году в пору сооружения зданий университета на Ленинских горах ректором университета одного из крупнейших математиков нашего века — Ивана Георгиевича Петровского, во-вторых, избрание в 1954 году деканом мехмата Андрея Николаевича Колмогорова.

Иван Георгиевич Петровский — человек энергичный, но скромный до застенчивости, деликатный, умеющий мыслить и действовать многопланово, бесконечно преданный науке и МГУ.

Семинары вел и лекции читал,  
Вспоминают их поныне...  
К перерыву твердо верил зал  
В то, что математика — богиня!  
С нами он душою молодел,  
До седин храня задор и форму.  
Здравствуй, «замечательный предел»!  
Здравствуй, море вечно юных формул!  
Красота и неизбежность цифр,  
Правишь ты извечно белым светом,  
Соблюдая формул код и шифр,  
Как Петровский — университетом!  
Что считать его рабочим днем,  
Если до утра не знал покоя?  
Вспомните, ведь именно при нем  
Выросла громада над Москвою!

*(Монтаж строф стихотворения,  
написанного бывшим студентом МГУ.)*

22 года И. Г. Петровский успешно организовывал всю жизнедеятельность университета и на много лет вперед определил пути его дальнейшего развития. Прекрасными слова-

ми почтил память Ивана Георгиевича, скончавшегося в 1973 году, Андрей Николаевич Колмогоров: «Осталось неизгладимое впечатление от образа этого великого труженика и человека неиссякаемой юношеской увлеченности».

Таким же был и автор этих слов — Андрей Николаевич Колмогоров. Член-корреспондент Академии наук СССР, профессор В. И. Арнольд вспоминает: «Когда Андрей Николаевич был деканом факультета (1954—1958 гг.), это были годы расцвета факультета, расцвета математики. Уровня, которого достиг тогда факультет, благодаря прежде всего Андрею Николаевичу Колмогорову и Ивану Георгиевичу Петровскому, он более никогда не достигал... Андрей Николаевич был замечательным деканом. Я мог бы назвать очень известных сейчас математиков, которых он тогда спас от исключения из университета».

### **«Души высокая свобода, что дружбою наречена»**

Эти строки А. Ахматовой очень любил Андрей Николаевич. Они отображали его собственное восприятие и понимание дружбы вообще и в частности многолетней дружбы (53 года!) с коллегой по факультету — академиком Павлом Сергеевичем Александровым (1896—1982 гг.) — создателем отечественной топологической школы, получившей мировое признание.

Сблизили Андрея Николаевича и Павла Сергеевича общие математические интересы и равно высокие нравственные критерии, любовь к художественной литературе, к искусству, к природе, служение гуманным целям. Занятно, однако, что в восприятии искусства они как бы до-

полняли друг друга: Андрея Николаевича больше увлекала древнерусская живопись. Он был поклонником архитектуры древних церквей, а к театру скорее равнодушен. Павел Сергеевич был почти профессиональным знатоком музыки и театра, очень ценил достояния классиков прозы — Толстого, Тургенева, Чехова. Андрей Николаевич отдавал предпочтение поэзии. Особенно любил стихотворения Тютчева и Пушкина, Ахматовой и Блока, а Тютчева возвышал даже над Пушкиным.

Андрея Николаевича спросили как-то: «Вы, как и многие математики, любите серьезную музыку. Расскажите, почему».

«По-видимому, между математическим творчеством и настоящим интересом к музыке имеются какие-то глубокие связи. Но выяснить и объяснить эти связи мне представляется довольно трудным. Замечу, впрочем, что мой друг Павел Сергеевич Александров рассказывал, что у него каждое направление математической мысли, тема для творческих размышлений связывались с тем или иным конкретным музыкальным произведением. Среди любимых композиторов назову в первую очередь Моцарта, Шумана, ну и, конечно, величайших музыкантов — Баха, Бетховена», — отвечал Андрей Николаевич.

Ощущение красоты спутствовало и собственному творчеству Андрея Николаевича. Он говорил, что даже в научных формулировках должен присутствовать эстетический элемент. Именно эстетические побуждения нередко приводят к содержательным следствиям.

Началом своей тесной, неразрывной дружбы Колмогоров и Александров считали лето 1929 года. Этим летом задумал Андрей Николаевич организовать лодочное плавание по Волге и искал себе компаньонов.

«Одним из них, — рассказывает Андрей Николаевич, — был намечен знакомый мне еще по средней школе Николай Нюберг. Мне до сих пор не совсем ясно, как я решился предложить быть третьим компаньоном Павлу Сергеевичу Александрову (Андрей Николаевич только что закончил аспирантуру, а Павел Сергеевич уже был в звании профессора, да и старше на 7 лет). Однако Павел Сергеевич сразу согласился... 16 июня мы отплыли вниз по Волге из Ярославля на веслах, иногда под самодельным парусом. Из литературы была взята лишь «Одиссея».

Типичный пейзаж побережий больших среднерусских рек, — продолжает рассказ Андрей Николаевич, — будь то Ока, Днепр, Дон или Волга, довольно однообразен. Река обычно разбивается на несколько рукавов, которые текут посреди зеленых заливных лугов и обтекают песчаные острова, заросшие ивняком. Пески на Волге отмыты до почти полной белизны (тогда еще не были сооружены на Волге большие водохранилища). Пейзаж этот не лишен своеобразного величия.

Он сразу стал близким Павлу Сергеевичу, и в последние годы мы с ним много раз плавали по Белой, Каме, Волге и Днепру.

В первые дни путешествия мы часто плыли и ночью: в летние белые ночи особенно захватывающее впечатление производит скольжение вдоль заросших ивняком берегов, наполненных птичьим пением. Хотелось, чтобы это продолжалось бесконечно.

И голос вечности зовет  
С неодолимостью нездешней,  
И над цветущею черешней  
Сиянье легкий месяц льет.

*А. Ахматова*

Конечно, мы не пренебрегали тем,



А. Н. Колмогоров в Комаровке

чтобы погулять по Костроме с ее  
торговыми рядами, монастырями,  
церквями:

Над городом древним алмазные  
русские ночи,  
И серп поднебесный желтеет,  
чем липовый мед.

А. Ахматова

Или побродить по Нижегородскому  
кремлю, или вылезти на высокие  
обрывы волжских берегов... Плыли  
мимо высоких берегов, покрытых яб-  
лоневыми садами,— родины анто-  
новских яблок.

Жарко веет ветер душный,  
Солнце руки обожгло,  
Надо мною свод воздушный,  
Словно синее стекло.

А. Ахматова

На двадцать первый день с мо-  
мента отплытия из Ярославля при-  
были в Самару... 1300 километров  
было позади».

Андрей Николаевич побывал во  
многих странах (вспоминая, он пе-  
речислял около двадцати), совершил  
два кругосветных путешествия на  
научно-исследовательском судне  
«Д. Менделеев». Он любил Францию,  
пять раз приезжал в эту страну для  
общения с учеными и с миссией  
дружбы. Всюду Андрей Николаевич  
чувствовал себя легко и как дома —  
надевал рюкзак и шорты, отпра-  
влялся в странствия, катался в го-  
рах на лыжах, ходил в музеи, отыс-  
кивал архитектурные достопримеча-  
тельности.

Восхищался соборами Нотр-Дам

и Реймским (Франция). А самыми замечательными сооружениями готики он считал соборы в городах Ульм и Фрайбург (Германия). Андрей Николаевич бывал здесь с Павлом Сергеевичем без дела — только для созерцания соборов; оба любовались этими памятниками готической архитектуры и днем, и на закате солнца, и, переночевав в гостинице, еще раз — рано утром.

Люблю высокие соборы,  
Душой смиряясь, посещать.

*А. Блок*

Однако, отдавая должное красоте и величию соборов, Павел Сергеевич обычно всякий раз цитировал любимую строку из «Мудрости» Верлена по-французски: «La mer est plus belle que les cathedrales» — «Море красивее соборов», воспринимая эту фразу, по-видимому, как утверждение, что в создании красоты нет мастера искуснее, чем природа.

И все же, несмотря на некоторое несовпадение вкусов и точек зрения, их дружба, по словам Павла Сергеевича, «за весь полувековой период не только не дала никакой трещины, но не сопровождалась даже никакой ссорой, не было у нас за все это время и какого бы то ни было взаимного непонимания...».

И Андрей Николаевич признает, что для него эти годы дружбы «явились основой того, что вся моя жизнь в целом оказалась преисполненной счастья, а основой моего благополучия явилась непрестанная заботливость со стороны Павла Сергеевича».

В 1935 году Колмогоров и Александров приобрели в свое владение часть загородного дома, а впоследствии и весь дом, в прошлом принадлежавший родственникам К. С. Станиславского, расположенный на берегу Клязьмы в поселке

Комаровка, недалеко от подмосковной станции Болшево. В этом доме в основном протекала их творческая жизнь.

Как правило, из семи дней недели четыре дня они проводили в Комаровке, один из которых полностью посвящался физкультурному отдыху — лыжам, гребле, большим пешеходным экскурсиям, нередко до 30—40 км, иногда в компании до пятнадцати участников разных возрастов.

Андрей Николаевич рассказывает: «В солнечные мартовские дни мы проводили на лыжах в одних трусах до 4 часов подряд. Мы никогда не были «моржами», купающимися круглый год ежедневно; мы купались по произволу, когда захочется. Особенно мы любили плавать в только что вскрывшихся реках, еще посреди сугробов по берегам. Утренняя пробежка на расстояние около километра при не слишком больших морозах делалась в одних трусах и босиком...»

Приятно вспомнить все бывшее —  
Предательский (в сугробе) пень,  
Когда в пригожий зимний день  
Вы в Комаровку приглашали  
И лыжным кроссом угощали.

*Из приветствия А. Н. Колмогорову  
в день его 80-летия*

Примерный распорядок дня в Комаровке был такой. Завтрак в 8—9 ч. Умственная работа — с 9 ч утра до 2 ч дня. Второй завтрак. Лыжный пробег или пешеходная прогулка с 3 ч до 5 ч. В период наиболее строгой организованности — предобеденный сон (40 мин). Обед в 5—6 ч. Потом чтение, музыка, беседы на научные и общие темы. В самом конце — короткая вечерняя прогулка, особенно в лунные зимние ночи. Сон в 10—11 ч. Весь этот распорядок нарушался в двух случаях:



а) когда научные поиски становились азартными и требовали неограниченного времени и б) в солнечные мартовские дни, когда лыжная прогулка делалась единственным занятием.

### Творческой жизни последняя треть

В 60—80-е годы главное место в творческой жизни Андрея Николаевича занимала активная, плодотворная деятельность в области школьного математического образования. Здесь можно выделить два больших направления.

Первое — работа с «сильными», т. е. с учащимися, проявляющими

интерес и способности к математике. Второе направление — работа, связанная с постановкой курса математики в средней общеобразовательной школе.

Разветвления первого направления: олимпиады, летние школы, физико-математическая школа при МГУ, литература для учащихся, проблема дифференциации старших классов, факультативные курсы. И всюду — инициативно, содержательно!

Олимпиады. Придавая большое значение олимпиадам как эффективному средству поиска способных ребят, Андрей Николаевич считал, что олимпиадные соревнования не должны быть чисто спортивными. Целью олимпиадного движения яв-



А. Н. Колмогоров с учениками

ляется приобщение способных ребят к математике, а не подготовка «чемпионов». Поэтому он ставил на первый план подготовительные тематические лекции и кружки, вовлекающие школьников в мир серьезной науки. Он сам много прочитал таких лекций для учеников и для учителей.

Летние школы. Он был одним из инициаторов их создания, определил их структуру. Сам активно работал во многих таких школах начиная с августа 1963 года, когда в подмосковном поселке Красновидово на базе дома отдыха МГУ была организована летняя математическая школа для учащихся. По вечерам здесь регулярно устраивались музыкальные или литературные вечера, велись беседы учеников с молодыми преподавателями на самые разные темы. Популярностью пользовались «английские шарады», логические игры, спорт.

Школа-интернат № 18. М. В. Ломоносов при основании университета говорил: «При университете необходимо должна быть гимназия, без которой университет как пашня без семян». И Андрей Николаевич в 1963 году создает при МГУ физико-математическую школу-интернат, возглавляет научное руководство школой, читает многочисленные курсы и даже ведет кружки. Сам организует музыкальные и поэтические вечера. Устраивает для учащихся лекции по русской архитектуре, истории изобразительного искусства, литературы, классической музыки; приносит им для прослушивания пластинки с записями лучших музыкантов и альбомы с произведениями знаменитых художников. Организует экскурсии в музеи, походы по Подмосковью (на лодках, лыжах, пешеходные), спортивные соревнования.

Школьников-москвичей не брали

в этот интернат. Явное предпочтение отдавалось сельским ребятам и школьникам из небольших городов и поселков, чтобы они, живущие вдали от научных центров, но проявившие способности к математике и физике, могли приобщиться к научной работе, стать учеными. Неоднократные попытки очень влиятельных людей «втиснуть» в школу-интернат № 18 своих молодых родственников-москвичей не имели успеха. Эта школа сразу же получила название «колмогоровской». В интернатском гимне, существующем с 1966 года (его автор — Ю. Ким), есть полушутливые строки:

Здесь ученого элемента  
Плотность очень велика:  
Аспирант и полдоцента  
На процент ученика.

За 25 лет существования школы № 18 ее окончили около 4000 учащихся. Из них до настоящего времени не менее 400 человек защитили кандидатские, а почти 30 — докторские диссертации. Научные работы выпускников физико-математических школ страны составляют заметную долю всех научных работ по математике и физике, подготавливаемых в стране.

Литература для учащихся. Сохранились конспекты отдельных неопубликованных лекций и курсов, прочитанных Андреем Николаевичем. Некоторые из них — подлинные шедевры. Андрей Николаевич был научным редактором пяти книг, написанных для учащихся. По его инициативе и настойчивости создан журнал «Квант», и он вел математический раздел в журнале.

Дифференциация обучения, факультативные курсы, сеть специальных классов — теперь такая система обучения признана одним из главных направлений развития

отечественной школы. А ведь Андрею Николаевичу пришлось около трех десятков лет пробивать стену непонимания разумности такой системы.

Программа школьного курса математики. В середине 60-х годов Андрей Николаевич возглавил работу по совершенствованию всей системы школьного математического образования в стране. Над созданием программы по математике он работал около трех лет в несколько этапов. В результате определились структура курса и основные методические принципы на предстоящий период. Бесспорно, что методика обучения математике сильно продвинулась вперед благодаря его работам — статьям, книгам, учебникам.

Необычайную ценность педагогическому и методологическому творчеству Андрея Николаевича Колмогорова придает то обстоятельство, что оно отражает широчайший, современный взгляд на содержание и методы преподавания математики в школе, принадлежащий человеку, обладавшему уникальным сочетанием качеств — математической гениальности, педагогического таланта, широты научных устремлений, высокой интеллигентности.

**Срок ли приблизится  
часу прощальному  
В утро ли шумное,  
в ночь ли безгласную.**

*М. Ю. Лермонтов*

Никому не приходилось слышать от Андрея Николаевича, чтобы он хвастал своими успехами, званием или положением. Деньги и материальные блага Андрей Николаевич высоко не ценил и для завоевания их ничего не делал. Международную



**А. Н. Колмогоров за работой**

премию Фонда Бальцана он передал в университетскую библиотеку, а международную премию Фонда Вольфа<sup>1</sup> вообще не получил на руки и никаких активных действий для ее получения не предпринимал. Но очень ценил шутку, доброе расположение, спортивные успехи и, разумеется, успехи в науке.

Он умел, как никто, восхищаться людьми и особенно теми их достоинствами, в которых они, по его мнению, превосходили его самого. Ему всегда нравилась ловкость, спортивность, изящество, и он всегда нахо-

---

*E. Balzan* — итальянский журналист. После его смерти в 1953 году его дочь передала наследство отца для формирования премиального фонда «*Balzan Prize*».

*R. Wolf* — изобретатель, дипломат, филантроп, организатор своего международного премиального Фонда (*The Wolf Foundation*).

дил возможность выразить свое восхищение искусству горнолыжников. Любил повторять, что когда настанет эра автоматов, которые будут мыслить, доказывать теоремы, играть в шахматы лучше людей, то навряд ли будет сконструирован автомат — искусный горнолыжник.

Общение с ним выпрямляло и возвышало, давало силы, которых люди в себе и не подозревали. И потому, наверное, Андрей Николаевич был счастлив в своих учениках (их около 70 человек), в их успехах в науке, в своих научных исследованиях и поисках истины, в самом процессе познания. А знал он изумительно много почти во всех областях культуры: литературе и поэзии, музыке и архитектуре; в знании истории и географии не было ему равных.

Так много в этом зале  
Любви, тепла и уваженья —  
Тех чувств, которых Вы снискали  
Своим трудом, огромным напряженьем  
Всех сил в борьбе за торжество наук,  
Заботами о всех — и сверстниках,  
И о научных внуках.

*Из приветствия А. Н. Колмогорову  
в день его 80-летия*

Последнее десятилетие жизни Андрея Николаевича было омрачено тяжелой болезнью. Зрение его ухудшилось, и сорокакилометровые лыжные маршруты пришлось сократить до двадцатикилометровых. Стало трудно бороться с морскими волнами, но он еще убегал за забор санатория «Узкое» от строгого надзора Анны Дмитриевны и врачей, чтобы купаться в пруду. В самые последние годы состояние его резко ухудшилось.

Круглосуточное дежурство около Андрея Николаевича в течение нескольких лет несли его ученики. Порой он мог произнести лишь несколько слов в час. Но все равно

с ним всегда было интересно: рассказывал, как медленно летели трассирующие снаряды над Комаровкой, как он — семидесятилетний — не мог сам выбраться из замерзающей Москвы-реки, как в Калькутте он впервые выкупал в Индийском океане своих тамошних учеников...

На 85-м году жизни — 20 октября 1987 года завершился жизненный путь одного из величайших математиков в истории человечества — Андрея Николаевича Колмогорова.

Немного долголетьей человек  
Цветка; в сравненьи с вечностью

их век

Равно ничтожен. Пережить одна  
Душа лишь колыбель свою должна.

*М. Ю. Лермонтов*

Многое из рассказанного в этом очерке содержится в «Воспоминаниях об А. Н. Колмогорове», написанных доктором физико-математических наук, профессором МГУ В. Н. Тихомировым — одним из самых близких и преданных Андрею Николаевичу его друзей. И сказал он в своих «Воспоминаниях...» очень тепло и точно:

«Андрей Николаевич принадлежал к числу тех несравненных гениев, которые украшают жизнь уже самим фактом своего существования. Одно лишь сознание того, что где-то на Земле бьется сердце человека, наделенного столь совершенным разумом и бескорыстной душой, окрыляло, дарило радость, давало силы жить, оберегало от дурных поступков и вдохновляло на благие дела.

...Творчество великого человека — это бесценное богатство, осмысление которого утверждает веру в человечество, а личность гения составляет нравственный пример и позволяет найти жизненные ориентиры».

## Чудеса в решете

Некий остроумец, разместив последовательность натуральных чисел в 6 столбцов (рис. 108), получил привлекательную модель «решета» Эратосфена для отсеивания простых чисел. Все неперечеркнутые числа (в красных кружочках) простые, кроме 121. Объясните почему.

Систему проведения прямых, вычеркивающих составные числа, понять легко. Как видим, и это тоже легко объяснимо, все простые числа от числа 5 и дальше свили себе гнездышки только в двух столбцах — в четвертом и шестом. Когда в какой-то строке четвертого и шестого столбцов оба числа простые, то это пара «близнецов»: (5; 7), (11; 13) и т. д. На рисунке 108 таких пар 9 плюс еще одна (3; 5) в других столбцах.

Андрей Николаевич Колмогоров, показывая на лекции для школьников это красивое «решето», предложил им самостоятельно найти ответы на такие вопросы:

1. Чтобы получить список простых чисел, меньших 1000, надо отсеять числа, которые делятся на 2, 3, 5, 7, 11, ... . На каком простом числе можно при этом остановиться? Как изменится ответ для случая составления таблицы простых чисел, меньших 10 000?

2. У первых двух пар «близнецов» (3; 5) и (5; 7) есть общий элемент 5. Поэтому скажем, что «расстояние» между ними нулевое. «Расстояние» между второй (5; 7) и третьей (11; 13) парами «близнецов» равно  $11 - 7 = 4$ , между третьей (11; 13) и четвертой (17; 19) парами  $17 - 13 = 4$ , между четвертой

2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115
116	117	118	119	120	121

Рис. 108

125	127	251	253	377	379
131	133	257	259	383	385
137	139	263	265	389	391
143	145	269	271	395	397
149	151	275	277	401	403
155	157	281	283	407	409
161	163	287	289	413	415
167	169	293	295	419	421
173	175	299	301	425	427
179	181	305	307	431	433
185	187	311	313	437	439
191	193	317	319	443	445
197	199	323	325	449	451
203	205	329	331	455	457
209	211	335	337	461	463
215	217	341	343	467	469
221	223	347	349	473	475
227	229	353	355	479	481
233	235	359	361	485	487
239	241	365	367	491	493
245	247	371	373	497	499
				...	...

Рис. 109

(17; 19) и пятой (29; 31) парами  $29 - 19 = 10$ .

Докажите, что далее «расстояния» между соседними парами «близнецов» никогда не будет меньше четырех.

То обстоятельство, что пристанищем всех простых чисел, начиная с числа 5, оказались лишь два столбца из шести, несомненно благоприятствует успеху в обнаружении еще каких-либо любопытных связей между простыми числами и их расположением в таблице-«решетке».

Для увеличения обозримости продолжим заполнение числами четвертого и шестого столбцов, по-прежнему выделяя простые числа (рис. 109).

Убедитесь в справедливости следующих результатов наблюдений:

1. Простые числа, «обитающие» в четвертом столбце, представимы в виде  $6k - 1$ , а те, что в шестом, — в виде  $6k + 1$ , где  $k$  — какое-нибудь натуральное число.

2. Разность между двумя простыми числами в одном и том же столбце равна шести или кратна шести.

3. На множестве простых чисел есть только одна тройка соседних простых чисел вида  $p$ ,  $p + 2$ ,  $p + 4$ . Какая?

4. Числом 3 можно начать арифметическую прогрессию из простых чисел, но она неизбежно оборвется на третьем члене, так как  $a_4 = 3 + 3d$  — составное число.

Примеры. 3, 5, 7; 3, 13, 23; ...

Сколько всего таких троек с  $a_1 = 3$  существует на промежутке  $[3; 500]$ ?

5. Возможно несколько прогрессий из простых чисел с  $a_1 = 5$ , но даже самая длинная из них состоит лишь из пяти членов. Почему?

Примеры. 5, 11, 17, 23, 29; 5, 53, 101, 149, 197; ...

Сколько всего самых длинных



прогрессий с  $a_1=5$  существует на промежутке  $[5; 500]$ ?

6. Арифметическая прогрессия из простых чисел с  $a_1 > 7$  и числом членов  $n \geq 9$  возможна лишь из «обитателей» одного столбца — четвертого либо шестого — и только при некоторых — кратных числу 30 — значениях разности  $d$ . Последние цифры членов такой прогрессии, очевидно, всегда одинаковы.

Пример. При  $a_1=199$  и  $d=30 \cdot 7$  получается 10 последовательных членов прогрессии:

199, 409, 619, 829, 1039,  
1249, 1459, 1669, 1879, 2089.

Все — простые числа. Докажете, что все эти 10 чисел размещаются в одном столбце «решета» — шестом.

Из девяти первых или девяти последних членов этой прогрессии желающие легко построят магический квадрат по схеме, представленной на рисунке 110. В таком магическом квадрате постоянная сумма (магическая константа),  $S=3a+12d$ , образуется в каждой строке, в каждом столбце и вдоль каждой из двух диагоналей квадрата.

7. Выявление прогрессии, состоящей из девяти и больше простых чисел, методом «проб и ошибок» — дело весьма трудоемкое и потому вынуждающее к использованию компьютерных средств. Но если нужны девять простых чисел лишь для сос-

тавления магического квадрата, то можно облегчить процедуру их подбора. Надо вместо одной прогрессии из девяти членов выявить на «решете» три прогрессии по три члена с одной и той же разностью  $d$ :

$$\begin{aligned} &(a, a+d, a+2d), \\ &(b, b+d, b+2d), \\ &(c, c+d, c+2d) — \end{aligned}$$

и одним и тем же «расстоянием» между прогрессиями:

$$b - (a+2d) = c - (b+2d).$$

Последнее требование равносильно условию  $a+c=2b$ . Разместив эти числа по схеме, указанной на рисунке 111, получим магический квадрат.

Пример. Пусть 11, 29, 47 ( $d=12$ ) — первая прогрессия. «Прыгнув» с 47 на 71 ( $71-47=24$ ), получим вторую прогрессию: 71, 89, 107. Еще «прыжок» на 24 — и получаем 131, 149, 167. Изготавливаем магический квадрат (рис. 112).

У п р а ж н е н и е. Самостоятельно составьте магический квадрат из девяти простых чисел, полагая, что  $a_1=5$ ,  $d=12$  и «расстояние» между прогрессиями равно 18.

8. Скользя взглядом вдоль четвертого и шестого столбцов «решета», обнаруживаем существование нескольких «стак» по 4 простых числа с какой-либо одной и той же последовательностью разностей меж-

$a+3d$	$a+8d$	$a+d$
$a+2d$	$a+4d$	$a+6d$
$a+7d$	$a$	$a+5d$

Рис. 110

$b$	$c+2d$	$a+d$
$a+2d$	$b+d$	$c$
$c+d$	$a$	$b+2d$

Рис. 111

71	167	29
47	89	131
149	11	107

$$S=267$$

Рис. 112



$a_1$	$b_2$	$c_3$	$d_4$
$d_3$	$c_4$	$b_1$	$a_2$
$b_4$	$a_3$	$d_2$	$c_1$
$c_2$	$d_1$	$a_4$	$b_3$

Рис. 113

ду соседними числами в каждой «стайке».

Например,

(a): 11, 13, 17, 23;

(b): 41, 43, 47, 53;

(c): 101, 103, 107, 113;

(d): 227, 229, 233, 239.

Последовательность разностей одна и та же: 2, 4, 6.

«Стайки» простых чисел со стабильными разностями между соседними числами в каждой «стайке» назовем «сходными». «Сходность» четырех «стаек» простых чисел — достаточное условие существования магического квадрата четвертого порядка:  $4 \times 4$ . Изготовить его можете, например, по схеме, представленной на рисунке 113.

У п р а ж н е н и е. Пользуясь «ре-

$a_2$	$b_1$	$c_5$	$d_4$	$e_3$
$d_5$	$e_4$	$a_3$	$b_2$	$c_1$
$b_3$	$c_2$	$d_1$	$e_5$	$a_4$
$e_1$	$a_5$	$b_4$	$c_3$	$d_2$
$c_4$	$d_3$	$e_2$	$a_1$	$b_5$

Рис. 114

шетом», подберите три «стайки» простых чисел, сходных с (a): 5, 11, 13, 19, и изготовьте магический квадрат  $4 \times 4$ .

9. По такой же «технологии» нетрудно изготовить из простых чисел магический квадрат пятого порядка:  $5 \times 5$ .

У п р а ж н е н и е. Выявите на «решете» пять «сходных стоек» по пять простых чисел в каждой с последовательностью разностей между соседними числами в каждой «стайке» 6, 6, 4, 6 и изготовьте магический квадрат  $5 \times 5$  по схеме, представленной на рисунке 114.

#### Четыре задачи на «магическую» тему

Задача 1. В шестом столбце таблицы (см. рис. 108, 109) «обитают» три прогрессии по три простых числа в каждой, пригодные для составления магического квадрата. Выявить их нелегко, но заманчиво.

Задача 2. Изменяя порядок цифр в записи простого числа 113, получим еще два простых числа: 131 и 311. Цифры этих чисел образуют полумагический квадрат (рис. 115), т. е. такой, в котором одинаковые суммы образуются по строкам, столбцам и, может быть, только по одной из двух диагоналей. Занятно и то, что эти же трехзначные числа образуются при чтении цифр слева направо, сверху вниз и снизу вверх.

Найдите в таблице (см. рис. 108, 109) еще три числа с таким же свойством цифр у каждого из них.

Задача 3. (*Магия колдуньи из «Фауста»*.) В «Фаусте» Гете есть сцена приготовления колдуньей омолаживающего зелья. Слова, которыми колдунья сопровождает свои манипуляции, обычно воспринимаются читателями как тарабарщина, бессмыслица:

*Du musst verstehn!*  
 (Ты должен понять!)  
*Aus Eins mach' Zehn,*  
 (Из 1 делаешь 10.)  
*Und Zwei lass gehn,*  
 (Пропускаешь 2.)  
*Und Drei mach' gleich,*  
 (А также и 3.)  
*So bist du reich!*  
 (Так ты будешь богат!)

*Verlier' die Vier.*  
 (Потеряй 4.)  
*Aus Funf und Sechs —*  
 (Из 5 и 6—)  
*So sagt die Hex —*  
 (Так говорит колдунья —)  
*Mach Sieben und Acht,*  
 (Делай 7 и 8 и наоборот.)  
*So ist's vollbracht!*  
 (Все свершилось!)

*Und Neun ist Eins, .....  
 Und Zehn ist keins, .....  
 Das ist das Hexen — Einmal — Eins!*

Но не мог же Гете потерять чувство художественной меры и отдать абракадабре целых 13 строк поэтического текста! Поиски смысла, скрытого в этой «чертовой дюжине» строк, по-видимому, не привели литературоведов к успеху. Может быть, потому, что у них не возникла мысль попытаться воспроизвести на бумаге рекомендации колдуньи.

Давайте это сделаем. Построим квадрат, разделенный на 9 ячеек, и разместим в ячейках 9 первых натуральных чисел в порядке их следования (рис. 116). Теперь выполняйте указания колдуньи.

*Из 1 делаешь 10* — в первой ячейке замените 1 на 10. *Пропускаешь 2, а также 3* — оставьте их на своих местах. *Потеряй 4* — замените 4 нулем. Далее надо заменить 5 и 6 на 7 и 8, а в ячейки, занятые числами 7 и 8, вписать 5 и 6 (рис. 117).

«Все свершилось!» — написано в десятой строке. Но тут колдунья хит-

1	1	3
1	3	1
3	1	1

Рис. 115

рит — оставляет в секрете требование еще одной замены числа.

Сообразите, о необходимости замены какого числа и на какое умолчала колдунья для окончательного формирования магического талисмана с константой  $S=15$  по сторонам, столбцам и одной диагонали.

З а д а ч а 4. (Магическая рамка.) Порядковые числа от 1 до 8 расположены вдоль сторон квадратной рамки, как показано на рисунке 118.

Обменивая местами эти числа, нетрудно превратить рамку в магическую с константой  $S$  — суммой чисел вдоль сторон, равной 12, или 13, или 14, или 15. Докажите, что возможна магическая рамка только с такими значениями  $S$ .

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 116

10	2	3
0	7	8
5	6	9

Рис. 117

1	2	3
8		4
7	6	5

Рис. 118


## «Приспособления» для дизайна формул

Дизайн математической конструкции обеспечивается иногда применением смысловых «приспособлений» (знаков, символов, операторов) взамен словесного описания конструкции или для приобретения компактности, эlegantности в записи формулы.

Придайте глубины печать  
Тому, чего нельзя понять.  
Красивые обозначения  
Вас выведут из затруднения.


*Гете. «Фауст»*

Из множества таких «приспособлений» вот их незначительная часть:

 — знак суммы.

Пример:


$$\sum_{k=0}^{k=n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

 — знак произведения.


Пример:

$$\Pi_1^{89} \operatorname{tg} n^\circ = \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ.$$

Докажите, что это произведение равно 1.

 — факториал:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n.$$

 — знак интеграла. По словам английского художника Вильяма Хогарта (XVIII в.), это стилизация волнистой S-образной линии, «сходной с подвижностью пламени и змеи». Воздавая должное совершенству окружности и строгой красоте прямой линии, Хогарт все же пальму первенства по привлекательности отдает кривой, «подобной знаку интеграла».

 — радикал и  — знак модуля.

Пример:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Другое назначение пары вертикальных отрезков  $\parallel$  — обрамлять квадратные таблицы чисел, например:

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} \text{ и т. д.,}$$

из которых по определенным правилам формируются алгебраические выражения, называемые определителями (детерминантами).

Форма записи определителя 2-го порядка:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Форма записи определителя 3-го порядка:

$$\begin{aligned} & (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - \\ & - (a_3 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_3 + a_1 b_3 c_2) = \\ & = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим одно занятное свойство определителя: по-разному размещая натуральные числа от 1 до 9 в форме определителя 3-го порядка, можно такой структурой представить числа 0, 1, 2 и далее чуть ли не всю шкалу натуральных чисел до 412 включительно:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, & 1 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 6 \end{vmatrix}, \\ 2 &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}, & 3 &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}, \dots \end{aligned}$$

Некий любитель математических развлечений утверждает, что ему удалось продолжить эту последовательность подряд до числа 323. Споткнулся он на числах 324, 325 и некоторых других.

Заинтересовавшимся предлагаем доказать, что число

$$412 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} - \text{предельное для рассмат-} \\ \text{риваемой структуры.}$$

$(-1)^n$  — регулятор знаков «плюс» и «минус». Позволяет, например, одной формулой

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

записать бесконечное множество корней уравнения

$$\sin x = a, \quad |a| \leq 1.$$

$\{x\}$  — «антье» — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

$\{x\}$  — дробная часть числа  $x$ , т. е.  $\{x\} = x - [x]$ .

**Пример.** Функция  $f$  целочисленного аргумента  $n$  описана словесно: при нечетных значениях  $n$  она равна числу  $a$ , а при четных значениях  $n$  — числу  $b$ . Дизайнер-математик предложит взамен словесного описания, быть может, такую элегантную запись, подобную «песне без слов»:

$$\frac{(1 - (-1)^n)a + (1 + (-1)^n)b}{2},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Если, в частности,  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ , то

$$f(n) = \frac{3 - (-1)^n}{4}.$$

Какой формулой в этом частном случае ( $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ) можно выразить  $f(n)$ , употребив оператор «антье»?

**Ответ.** Возможна, например, такая конструкция:

$$f(n) = \frac{1}{2} \left( n + 1 - 2 \left[ \frac{n}{2} \right] \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Порадуемся вместе, если найдутся другие негромоздкие формы ответа.

**А. Н. Колмогоров — школьникам**  
(Из публикаций в «Кванте» и его статьи «Фундаментальные понятия школьной математики»)

**Задача 5.** Постройте графики функций:

$$f_1(x) = [x], \quad f_2(x) = \{x\},$$

$$f_3(x) = |\{x\} - 0,5|,$$

$$f_4(x) = \frac{1}{[x]}, \quad f_5(x) = \frac{1}{2} \left( x + 1 - 2 \left[ \frac{x}{2} \right] \right).$$

Самостоятельно решите задачу, предложенную А. Н. Колмогоровым в статье «Что такое функция?» (Квант.—1970.—№ 1):

Для любого натурального числа  $n$  определим  $S(n)$  как сумму делителей числа  $n$  (не считая самого  $n$ ). Например:

$$S(1) = 0, \quad S(2) = 1, \quad S(3) = 6, \\ S(12) = 16, \quad S(28) = 28.$$

Доказать, что  $S(n)$  не принимает значений 2 и 5.

**Задача 6.** Постройте графики следующих уравнений с двумя переменными:

а)  $\{x\}^2 + \{y\}^2 = 0$  — равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \{x\} = 0 \\ \{y\} = 0; \end{cases}$$

б)  $\{x\} \cdot \{y\} = 0$  — равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \{x\} = 0 \\ -\infty < y < \infty \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \{y\} = 0 \\ -\infty < x < \infty; \end{cases}$$

$$\text{в) } \{x\} = \{y\};$$

$$\text{г) } [x] = [y].$$

Графики этих уравнений очень красивы, не правда ли?

**Задача 7.** а) Нарисуйте сколько хотите «авангардистских» карти-

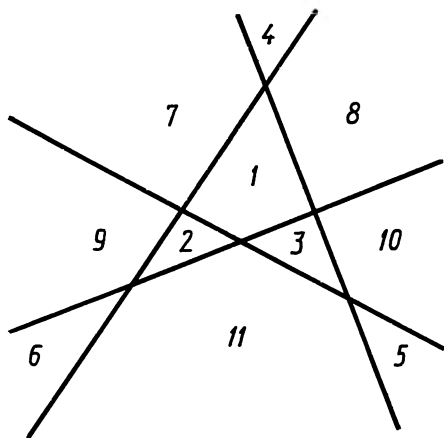


Рис. 119

нок, похожих на изображенную на рисунке 119. Каждая картинка должна состоять из четырех прямых линий «общего положения», т. е. расположенных на плоскости произвольно, но так, что никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны.

При соблюдении этих требований нарисованная конфигурация прямых разбивает плоскость на 11 выпуклых

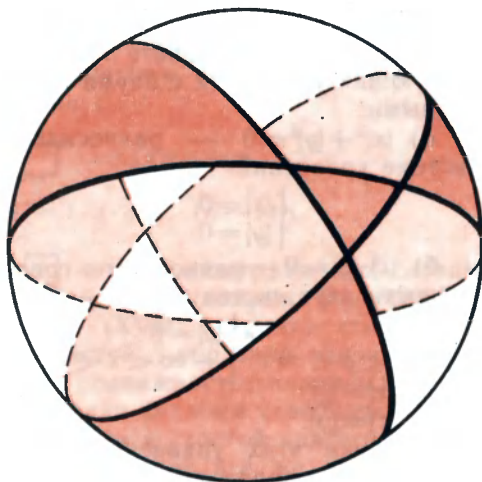


Рис. 120

областей: один четырехугольник (1), два треугольника (2, 3) и восемь «бесконечных» фигур, называемых по числу ( $n$ ) вершин « $n$ -углами», из которых три фигуры вида «1-угол» (4, 5, 6) с одной вершиной, четыре фигуры вида «2-угол» (7, 8, 9, 10) с двумя вершинами и одна фигура вида «3-угол» (11) с тремя вершинами.

Так будет на любом рисунке с четырьмя прямыми «общего положения».

Как надо рассуждать, чтобы доказать, что так будет всегда?

б) Три больших круга на сфере, не проходящие через одну точку, разбивают ее на 8 треугольников (рис. 120).

На какие области разбивают сферу четыре больших круга, никакие три из которых не проходят через одну точку (т. е. в «общем положении»)?

в) На какие области могут разбить сферу пять больших кругов в «общем положении»?

### Напутствие А. Н. Колмогорова

«В основе большинства математических открытий лежит какая-либо простая идея: наглядное геометрическое построение, новое элементарное неравенство и т. п. Нужно только надлежащим образом применить эту простую идею к решению задачи, которая с первого взгляда кажется недоступной» — это напутствие Андрея Николаевича дает импульс созидательному направлению мысли в поисках решения как проблемных, так и конкретных математических задач.

Вот такая, например, задача была предложена конкурсантам олимпиады «Турнир городов» (1986 г.):

Задача 8. Докажите, что для  $n$  положительных чисел

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$$

выполнены неравенства:

$$а) a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3)^2;$$

$$б) a_1^2 - a_2^2 + \dots - (-1)^n a_n^2 \geq (a_1 - a_2 + \dots - (-1)^n a_n)^2.$$

Некоторые из участников олимпиады придумали геометрический эквивалент этой алгебраической задачи — получилось простое, изящное решение.

Каков ваш подход к решению этой задачи? Может быть, попытаетесь «переоткрыть» геометрическое решение, придуманное участниками олимпиады?

### Инвариант — изящного решения гарант

Задано конечное множество объектов, и описаны разрешаемые преобразования этого множества. Требуется, лишь подразумевая выполнение указанных преобразований, доказать, что через конечное число шагов обязательно сформируется множество желаемого вида.

В решении трех следующих задач гарантом быстрого успеха является выявление *инварианта преобразований*, т. е. такой числовой характеристики объектов множества, которая остается неизменной при выполнении указанных преобразований в любой последовательности либо монотонно изменяется при определенном чередовании преобразований.

**Задача 9.** Каждое из натуральных чисел от 1 до 1 000 000 заменили суммой его цифр. С полученным множеством чисел проделали то же самое и так далее до тех пор, пока не получилось множество, состоящее из миллиона однозначных чисел. Каких чисел в получившемся множестве больше: единиц или двоек?

**Задача 10.** На доске написано несколько плюсов и минусов. Решается стереть любые два знака

и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус — в противном случае. Докажите, что последний оставшийся на доске знак не зависит от порядка, в котором производились стирания.

**Задача 11.** В каждой клетке прямоугольной таблицы написано натуральное число. За один ход разрешается удвоить все числа какой-нибудь строки или же вычесть единицу из всех чисел какого-нибудь столбца. Докажите, что за несколько ходов можно получить таблицу, в которой все числа равны 0.

### У входа в храм науки о случайном

Однажды на страницах журнала «Современник» (1836 г.), издаваемого А. С. Пушкиным, появилась статья «О надежде», написанная князем П. Б. Козловским — дипломатом, глубоко образованным человеком. Статья начиналась с эпиграфа из Горация: «Осветить истину сквозь туман заблуждений» — и представляла собой первое в русской литературе популярное изложение, как пишет автор, «философической математики, называемой исчислением вероятностей или — по-моему лучше — наукой исчисления удобосбыточностей».

Идея числовой оценки шансов на случайный успех, на выигрыш, на появление ожидаемого события «стара как мир», но обретать силу метода, теории она начала с середины XVII века в трудах Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, Я. Бернулли. Мощный импульс развитию теории вероятностей дали ставшие классическими работы П. Л. Чебышева, главы созданной им «петербургской» школы, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова.



Статус истинно математической науки теория вероятностей обрела лишь с 1933 года, когда А. Н. Колмогоровым был создан аксиоматический фундамент теории — введено аксиоматическое определение вероятности, принятое всюду и поныне. Теория вероятностей теперь — это величественный храм мощной, фундаментальной, очень красивой науки.

В преддверии этого храма понятие вероятности формируется вначале на абстрактной модели реальных испытаний с известным числом ( $n$ ) случайных исходов, предполагаемых равновероятными. Обозначим их  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Так, в модели испытаний, состоящих в бросании монеты, предусматриваются только 2 возможных исхода:  $E_1$  — появление герба,  $E_2$  — появление решки. Оба исхода предполагаются (если к этому есть объективные основания) равновероятными, и потому естественно считать их равновероятными.

Любое возможное множество исходов называется *случайным событием*. Множество, состоящее из всех  $n$  возможных исходов рассмат-

риваемых испытаний, образует *достоверное событие*. Достоверному событию приписывается вероятность, равная 1. Когда все  $n$  исходов, образующих достоверное событие, признаются равновероятными, их считают равновероятными; тогда вероятность  $p$  каждого отдельного исхода равна  $\frac{1}{n}$ , т. е.  $p = \frac{1}{n}$ .

Если известно, что  $m$  исходов из  $n$  возможных образуют событие  $A$ , то его вероятность  $P(A) = \frac{m}{n}$  или в форме классического определения вероятности: вероятность события  $A$  равна отношению числа ( $m$ ) исходов, благоприятствующих наступлению события  $A$ , к числу ( $n$ ) всех равновероятных исходов.

Для случайных событий ( $A$ ) постулируются три основных утверждения:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

2.  $P(A) = 1$ , если  $A$  — достоверное событие.

3.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , где событие  $A \cup B$  означает осуществление **или** события  $A$ , **или** события  $B$ , причем  $A$  и  $B$  не могут произойти одновременно.

**Пример 1.** Найдем вероятность события: при трехразовом бросании монеты появляется герб хотя бы один раз (событие  $A$ ).

Для выяснения количества всех возможных исходов удобна схема (рис. 121).

Только в одном из восьми исходов герб не появляется ни разу — в событии ( $PPP$ ). В остальных семи случаях герб появляется хотя бы один раз. Следовательно,

$$P(A) = \frac{7}{8} = 0,875.$$

Наряду с событием  $A \cup B$ , что означает: **или**  $A$  **или**  $B$ , вводят еще событие  $A \cap B$ , что означает: совмест-

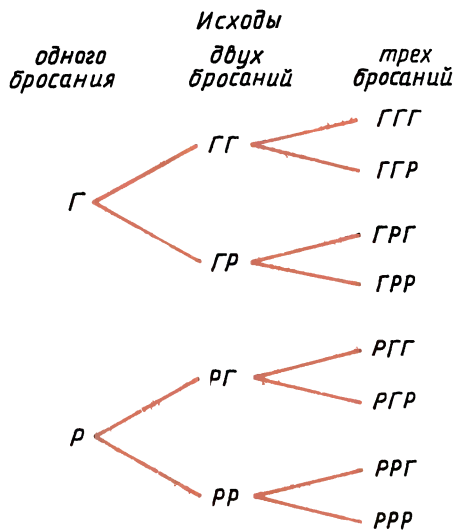


Рис. 121



ное появление событий  $A$  и  $B$  одновременно или одно после другого. Если при этом реальные условия для событий  $A$  и  $B$  таковы, что вероятность одного из них, скажем  $B$ , характеризуется одним и тем же числом вне зависимости от того, произошло или нет событие  $A$ , то такие события называются *независимыми*. Доказывается теорема (умножения): если события  $A$  и  $B$  независимы, то

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

т. е. вероятность совместного появления независимых событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятностей  $P(A)$  и  $P(B)$ .

**Пример 2.** В урне 3 белых шара и 2 черных. Наугад вынимаем один шар и, не возвращая его в урну, вторично вынимаем один шар.

Рассматриваются события:

$A$  — появление белого шара в первый раз;

$B$  — появление белого шара во второй раз.

$$P(A) = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}.$$

Если событие  $A$  произошло, то в урне остались 2 белых шара и 2 черных и

$$P(B) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}.$$

Если же  $A$  не произошло, то в урне остались 3 белых шара и один черный. Тогда

$$P(B) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}.$$

Значит, события  $A$  и  $B$  зависимые.

**Пример 3.** В урне 3 белых шара и 2 черных. Наугад вынимаем один шар, возвращаем его в урну и вторично вынимаем один шар.

Рассматриваются те же события  $A$  и  $B$ , что и в примере 1. Теперь  $P(A) = \frac{3}{5}$ , и независимо от того, произошло или нет событие  $A$ ,

$P(B) = \frac{3}{5}$ . События  $A$  и  $B$  независимы. Тогда согласно теореме умножения для независимых событий вероятность вынуть белый шар и в первый раз и во второй раз равна

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Очевидно, если в примере 2 повторять процедуру вынимания  $n$  раз, то вероятность появления белого шара в первый раз, и во второй раз, и ..., и в  $n$ -й раз равна  $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ .

**Пример 4.** Утверждение Ферма о невозможности найти хотя бы одну тройку целых положительных чисел  $x$ ,  $y$  и  $a$ , удовлетворяющих уравнению

$$x^n + y^n = a^n, \quad (1)$$

где натуральное  $n > 2$ , наконец-то по-видимому, доказано. Приоритетное доказательство — в публикации Института, проблем управления (Москва, март, 1993), последующее — в устном сообщении (Кембридж, май, 1993, см. с. 139).

Любопытную интерпретацию дал этой теореме американский математик Е. С. Молин (1946 г.), перефразировав ее как задачу теории вероятностей.

В барабанчик заложено  $x$  белых шаров и  $y$  черных. Ясно, что  $x$  и  $y$  — целые положительные числа. Если  $n$  раз вытаскивать из барабанчика по одному шару с возвращением его в барабанчик перед каждым последующим вытаскиванием, то вероятность того, что все  $n$  раз будут вытащены белые шары, равна  $\left(\frac{x}{x+y}\right)^n$  (см. пример 3).

Соответственно вероятность того, что все  $n$  раз будут вытащены черные шары, равна  $\left(\frac{y}{x+y}\right)^n$ . Оба упомянутых события несовместимы, следо-

вательно, вероятность того, что вынутые шары будут все белыми или все черными, согласно постулату 3, равна

$$P = \left(\frac{x}{x+y}\right)^n + \left(\frac{y}{x+y}\right)^n.$$

Разделим обе части заданного уравнения (1) на  $(x+y)^n$ :

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^n + \left(\frac{y}{x+y}\right)^n = \left(\frac{a}{x+y}\right)^n. \quad (2)$$

Значит, левую часть получившегося уравнения (2) можно понимать как число  $P$ .

Пусть теперь изменен состав содержимого барабанчика так, что  $a$  шаров стали белыми и  $b$  — черными, но при этом общее число шаров осталось неизменным:

$$a + b = x + y.$$

Из барабанчика с новым составом шаров вновь производим  $n$  вытаскиваний по одному шару с возвращением. Тогда вероятность того, что все вынутые шары окажутся белыми, равна

$$P' = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n = \left(\frac{a}{x+y}\right)^n.$$

А это и есть правая часть уравнения (2). Поэтому запись теоремы Ферма приобретает следующий вид:  $P = P'$  — и тем самым сводится к требованию: доказать, что невозможно изменить состав содержимого барабанчика так, чтобы при  $n > 2$  имело место равенство  $P = P'$ , а следовательно, и исходное равенство (1).

Эстетика в теории вероятностей всюду, в частности в содержании и решениях задач, своего рода мини-атюрных поэм в прозе.

**Задача 12.** (*Дочь? Сын? С какой вероятностью?*) У автора этой книги двое детей — не близнецов. Один ребенок — дочь. Какова вероятность, что и второй ребенок — дочь?

И у художника двое детей. Старший ребенок — мальчик. Какова ве-

роятность, что второй ребенок тоже мальчик?

**Задача 13.** (*Подлежит расследованию.*) На полке расставлены в один ряд 6 одинаковых баночек: 3 — с черной краской и 3 — с красной. Не глядя на наклейки, наугад снимают с полки 3 баночки. Какова вероятность, что эти баночки содержат краску одного цвета?

Попытка решения 1. Комплект из трех баночек, снятых наугад с полки, может содержать:

$$\text{а) } \frac{\text{ччч}}{3\text{ч}}, \quad \text{б) } \frac{\text{ккк}}{3\text{к}},$$

$$\text{в) } \frac{\text{ччк}}{2\text{ч}+1\text{к}}, \quad \text{г) } \frac{\text{ккч}}{2\text{к}+1\text{ч}}.$$

Каждый комплект трех баночек — возможный исход. Всего 4 возможных исхода. Из них два удовлетворяют требованию задачи, два остальных нет. Следовательно, вероятность события  $A$  (3 ч. или 3 к.) равна

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Попытка решения 2. Раздвинем баночки на полке, не глядя на этикетки, — 3 налево и 3 направо. При этом могло так случиться, что:

а) слева оказались 3 баночки одного цвета, справа — другого — благоприятный случай;

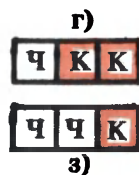
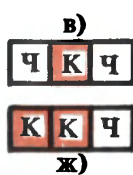
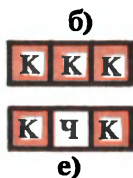
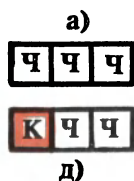
б) слева на одну баночку больше «ч.», чем «к.»;

в) слева на одну баночку больше «к.», чем «ч.».

Оба последних случая неблагоприятны. Следовательно, вероятность события  $A$  (3 ч. или 3 к.) равна

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

Попытка решения 3. Полный набор равновозможных исходов можно составить из следующих восьми комбинаций (в каждой 3 баночки):



Из них 2 комбинации в пользу задуманного события  $A$  (3 ч. или 3 к.). Следовательно,

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Получилось, что одно и то же событие в условиях одного и того же опыта имеет три разные меры вероятности:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ .

Вот такой казус! Какой же результат верен?

**Задача 14.** (*Сколько голубоглазых детей у капитана?*) В семье капитана дальнего плавания есть дети голубоглазые и кареглазые. Всякий раз, когда он после очередного рейса возвращается домой, первыми его встречают какие-либо двое из детей. Кто именно — чистая случайность. Но в силу той же случайности в 50% всех случаев это оказываются голубоглазые дети. Сколько же всего голубоглазых детей в семье капитана?

**Задача 15.** (*Озабоченность оператора.*) Оператор, наблюдая ход технологического процесса, при котором происходит смешивание двух веществ, следит за тем, чтобы температура компонентов смеси не была одновременно более  $600^\circ$  и не была одновременно менее  $560^\circ$ .

Считая, что в ходе процесса температура первого вещества ( $T_1$ ) с одинаковой возможностью может принимать любое значение от  $550^\circ$  до  $620^\circ$ , а температура второго ( $T_2$ ) — от  $555^\circ$  до  $605^\circ$ , найти вероятность того, что процесс будет протекать нормально.

**Задача 16.** (*Вероятность для дискриминанта быть неотрицательным.*) С какой вероятностью можно ожидать, что дискриминант квадратного уравнения  $x^2 + 2px + q = 0$  будет неотрицательным, если числовые значения  $p$  и  $q$  назначать произвольно при условии, что  $|p| \leq 1$  и  $|q| \leq 1$ ?

### На часок к семейке репьюнитов

Семейка репьюнитов —  $R(b, n)$  — это натуральные числа, запись которых в любой системе счисления с основанием  $b > 1$  состоит только из единиц. Репьюниты в десятичной системе обозначаются короче ( $R_n$ ):

$$R_1 = 1, R_2 = 11, R_3 = 111, R_4 = 1111, \dots$$

«Фамилия» этого семейства — *Repunit* — образована слиянием двух английских слов: *repeated unit* (повторенная единица).

Обнаружено немало интересных свойств репьюнитов, но также немало и не разгаданных еще. Например, в семействе репьюнитов ( $R_n$ ) выявлено пока только 5 простых чисел:

$$R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317} \text{ и } R_{1031}.$$

Живописна табличка простых делителей начальной последовательности составных репьюнитов:

$$\begin{aligned} 111 &= 3 \cdot 37 \\ 1111 &= 11 \cdot 101 \\ 11111 &= 41 \cdot 271 \\ 111111 &= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1111111 &= 239 \cdot 4649 \\ 11111111 &= 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \\ 111111111 &= 3 \cdot 37 \cdot 333 \cdot 667 \end{aligned}$$

В результате умножения  $R_i \cdot R_j$  ( $j \leq i, j < 9$ ) получается палиндромическое число вида  $(12...j...21)$  из  $i+j-1$  цифр с цифрой  $j$  посередине. (Палиндромом называется натуральное число, запись которого совпадает с записью своего зеркального отражения.)

Примеры.

$$\begin{array}{r} \times \quad 1111 \\ \quad 111 \\ \hline 1233321 \end{array} \quad 111^2 = 12321$$

Если  $i \geq j > 9$ , то  $R_i \cdot R_j$  — не палиндром.

Задача 17. (Из «Семейной хроники» Репьюнитов.)

1. Какими цифрами следует заменить буквы, чтобы сумма девяти слагаемых стала равной репьюниту?

$$\begin{array}{r} \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ + \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \hline \end{array}$$

.....

2. Произведением каких двух репьюнитов является число

$$12345554321?$$

3. В прошлом месяце сумма, вырученная фирмой от продажи партии новых мини-автомобилей, составила 1111111 долларов. Если каждый автомобиль имел одну и ту же цену, то сколько их было продано?

4. Какие цифры заменены буквами в десятичной записи произведения

$$\begin{array}{r} \times \text{RRRRRRR} \\ \text{RRRRRRR} \\ \hline \text{REPUNITINUPER} \end{array} ?$$

5. Дайте рекуррентное определение репьюнита.

6. Являются ли взаимно простыми два репьюнита, номера ( $n$ ) которых: а) последовательные числа, б) последовательные нечетные числа, в) последовательные четные числа?

7. Какие репьюниты в системе счисления с четным основанием будут нечетными, а в системе счисления с нечетным основанием будут четными?

*A propos* (кстати): еще более очаровательные задачи и сведения о репьюнитах содержатся в общедоступной для чтения книге американского математика С. Ейтса «Репьюниты и десятичные периоды» (Мир, 1992. Серия «Современная математика»). Перевод с английского, выполненный В. Г. Столяром, по словам автора книги, «стал возможным благодаря энтузиазму и творческому порыву В. Г. Столяра, который уже применяет содержание книги для развития математических наклонностей учащихся».

### Маленькая викторина (с ответами)

Первый вопрос навеян стихотворением русского поэта К. Случевского. В манере, свойственной поэзии, оно отображает красоту и силу одной из математических абстракций:

Не существует «мнимых величин»!  
Но невозможное становится возможным:  
Их можно взять в расчет,  
от них пойдет почин  
К большим задачам и решениям сложным.

Не существующей как бы величиной  
Наш мозг орудует, и, сделав вычисления,  
Он властно действует и ставит над  
землей,  
Как диво техники, свои сооружения.

Однажды нес пастух куда-то молоко,  
но так ужасно далеко,  
что уж назад не возвращался.  
Читатель! Он тебе не попадался?

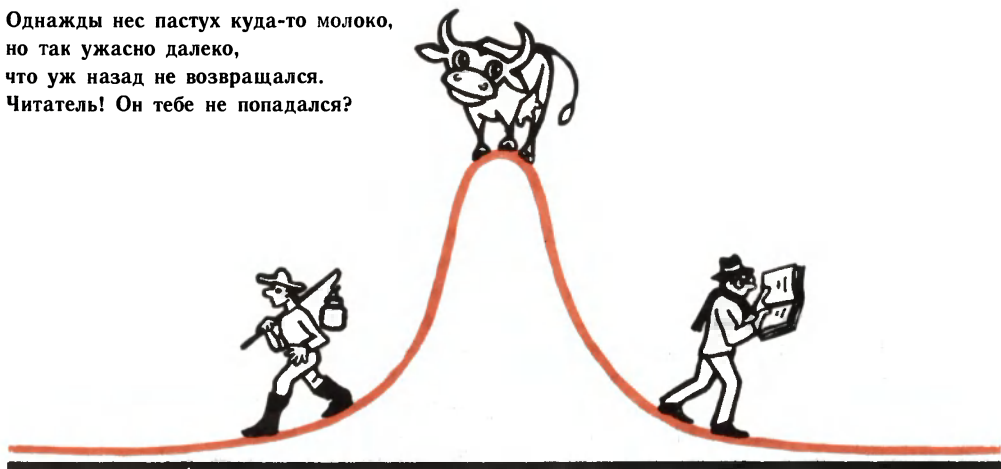


Рис. 122

«Ничто» — орудует?! Возможно ли  
понять?

Чтобы «ничто» участвовало в деле?  
Уж ежели «ничто» способно плотью  
стать,

Так что ж с вопросом о душе и теле?

Но мысль людей свободна и дерзка!  
Так Бог велел! Она быть дерзкой  
вправе!

Ответов не дает на многое пока;  
Но будут чудеса, придут и станут  
выявлять!

Что же это за «мнимая величина», которая «ничто» в реальном мире, но «взятая в расчет» становится могучим инструментом больших математических свершений?

Ответ. «Мнимая величина» — функция переменного  $z = x + yi$ , где  $x$ ,  $y$  — действительные числа,  $i = \sqrt{-1}$  — единица «мнимых чисел», такая, что  $i^2 = -1$  (по определению). Ей нет прообраза в материальном мире. Возникнув «из ума» не в очень отдаленные века, она теперь «оруду-

ет», свершает «чудеса» и в математике, и в прикладных науках.

Второй вопрос (из серии «Математики шутят»). Вопрос навеяла картинка — сфантазированная художником иллюстрация к байке знаменитого Козьмы Пруткова (рис. 122).

Дорожка, по которой идут путники, известна в теории вероятностей как «кривая Гаусса». Подразумевается, что ветви этой кривой простираются влево и вправо бесконечно далеко, постепенно приближаясь к оси абсцисс, но никогда ее не пересекая. Пастух и Читатель идут по этой бесконечной дорожке: один влево, другой вправо.

Встретятся ли они когда-нибудь?

Ответ. Пастух идет в сторону  $-\infty$ , а Читатель — в сторону  $+\infty$ . Поскольку  $+\infty$  и  $-\infty$  — это математические абстракции, никто не может сказать, идут Пастух и Читатель к двум разным «точкам» или к одной и той же.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Например, (13, 43, 73), (97, 127, 157), (181, 211, 241).

2. Искомые простые числа 199, 337 и 197. Перестановки цифр приводят также к простым числам, из цифр которых формируются магические квадраты, представленные на рисунке 123.

3. Числовой квадрат, перестроенный по указаниям колдуньи, представлен на рисунке 117. Он мгновенно станет полумагическим, как только заменим девятку в последней ячейке квадрата четверкой (рис. 124). Теперь формирование «талисмана» окончено, и последние три строки тринадцатистишия уже

1	9	9
9	1	9
9	9	1

3	3	7
3	7	3
7	3	3

1	9	7
9	7	1
7	1	9

Рис. 123

10	2	3
0	7	8
5	6	4

Рис. 124

ничего не добавляют к пониманию смысла «заклинаний» колдуньи.

Превращением начального числового квадрата в магический Гете символизировал процесс омоложения Фауста.

Магические квадраты, обычно из  $n^2$  последовательных натуральных чисел, — это очень древняя математическая формация. Им уже около семи тысяч лет!

4. Сумма всех заданных чисел равна 36. Заменим числа буквами  $a_1, a_2, \dots, a_8$  и положим, что их расположение на рисунке 125,  $a$  удовлетворяет условию задачи, т. е.

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_5 + a_6 + a_7 = S$$

и

$$a_1 + a_8 + a_7 = a_3 + a_4 + a_5 = S.$$

Тогда

$$2S + a_8 + a_4 = 2S + a_2 + a_6 = 36,$$

откуда

$$a_8 + a_4 = a_2 + a_6 = 36 - 2S.$$

Так как  $36 - 2S > 0$ , то  $S < 18$ . Пусть  $S = 17$ , тогда  $a_1 + a_6 = 2$  и  $a_2 = a_6 = 1$ , что недопустимо. Пусть  $S = 16$ , тогда

$$a_8 + a_4 = a_2 + a_6 = 4.$$

Одна пара пригодных чисел есть: 1 и 3, а другой, отличной от первой, нет. Следовательно,  $S \neq 16$ . Пусть  $S = 15$ , тогда

$$a_8 + a_4 = a_2 + a_6 = 6,$$

$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_8$		$a_4$
$a_7$	$a_6$	$a_5$

а)

8	4	3
1		5
6	2	7

б)

Рис. 125

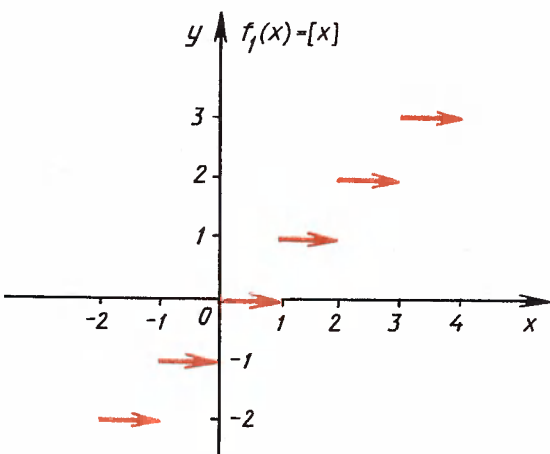


Рис. 126

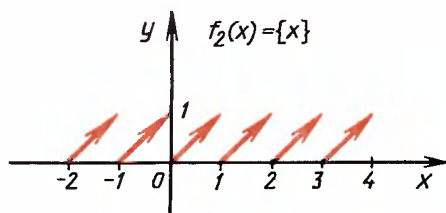


Рис. 127

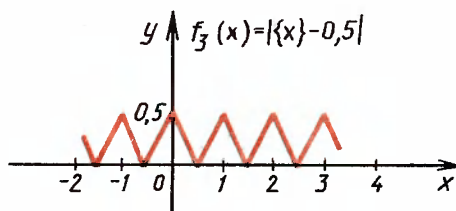


Рис. 128

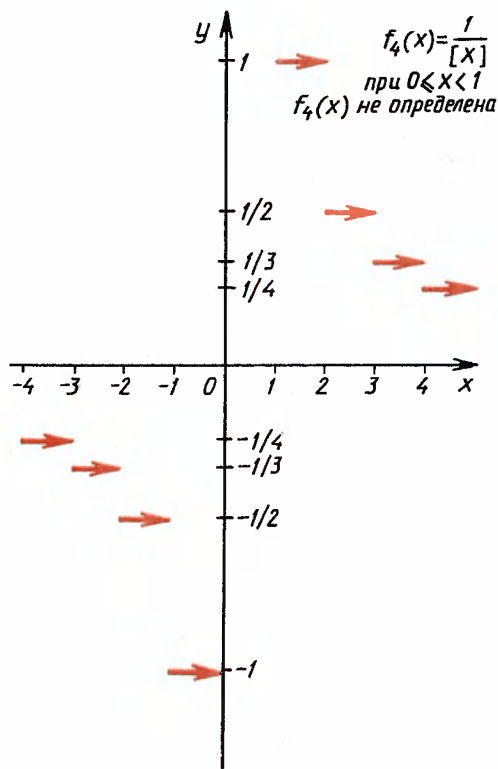


Рис. 129

откуда, например,  $a_8=1$ ,  $a_4=5$ ,  $a_2=4$ ,  $a_6=2$ . По углам размещаются остальные числа, и одна из возможных магических рамок с  $S=15$  готова (рис. 125, б). Аналогично решается задача для  $S=14$ ,  $13$ ,  $12$ . Магическая рамка с  $S < 12$  невозможна. Действительно, пусть  $S=11$ , тогда

$$a_8 + a_4 = a_2 + a_6 = 14 = 8 + 6 —$$

второй пары подходящих неравных чисел нет. Если  $S=10$ , то  $36-2S=16$ — среди заданных чисел нет даже одной пары подходящих неравных слагаемых. Итак, на множестве заданных чисел существуют магические рамки только с константой  $12 \leq S \leq 15$ .

5. Графики представлены на рисунках 126—130.

6. Графики представлены на рисунке 131—134.

7. а) Подтверждение рисунками само по себе еще не является доказательством, но содействует его поиску. Надо представить, что на плоскости сначала проведены три прямые, попарно пересекающиеся в различных точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 135). Затем проводится четвертая прямая  $l$  — произвольно, но так, чтобы сохранялось «общее положение» для четырех прямых. Прямая  $l$  делит плоскость на две полуплоскости и может находиться только в двух положениях относительно точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ : 1) две из них лежат в одной полуплос-



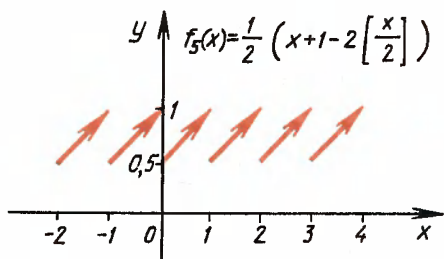


Рис. 130

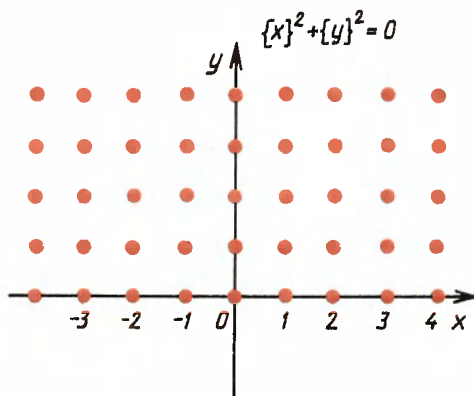


Рис. 131

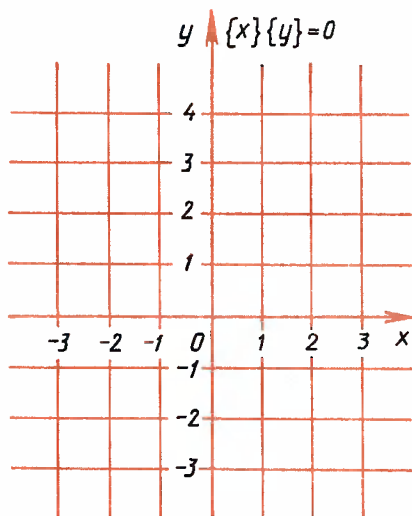


Рис. 132

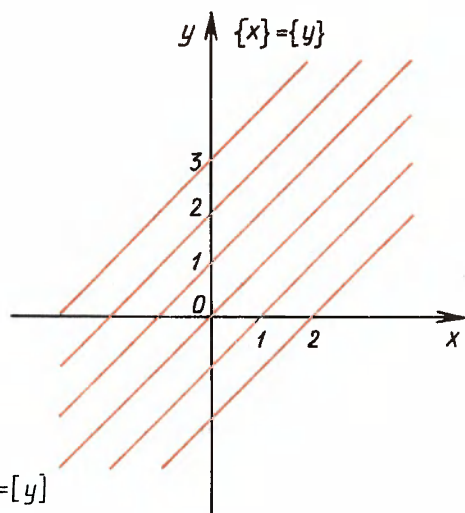


Рис. 133

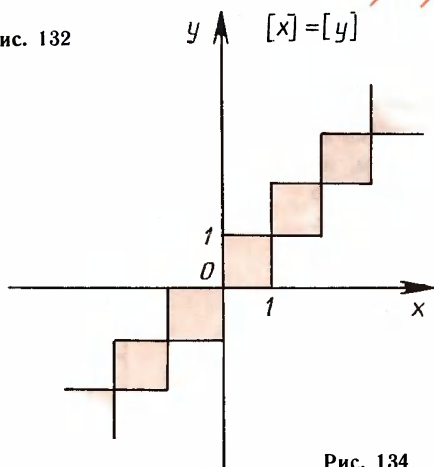


Рис. 134

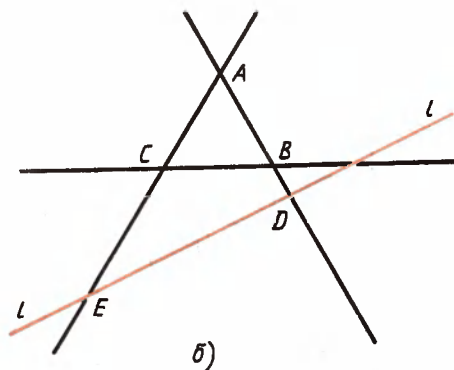
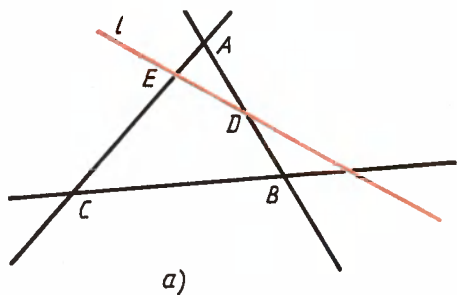


Рис. 135

кости, а одна (скажем,  $A$ ) — в другой (рис. 135,  $a$ ); 2) все три точки лежат по одну сторону от прямой  $l$ , например, как на рисунке 135,  $b$ . В том и другом случаях формируется четырехугольник  $BCED$  без параллельных сторон: в первом — отсекаемый от треугольника  $ABC$ , во втором — отсекаемый от фигуры «2-угол» (с вершинами  $B$  и  $C$  на рисунке 135,  $b$ ).

На любом рисунке проведенные четыре прямые «общего положения» формируют, кроме четырехугольника, и остальные 10 областей такого же вида, как на рисунке 119. Итак, наблюдаемое на разных рисунках оказывается обоснованно закономерным.

$b$ ) Есть короткий изящный прием решения: спроектировать сферу с образовавшимися на ней областями на плоскость и далее решать, как задачу  $a$ ). Но это для знающих основы проективной геометрии. Для непосредственного решения надо представить, что на сфере проведены три больших круга 1, 2, 3 (см. рис. 120). Они делят сферу на 8 треугольников. Выясним, сколько из них будет пересекать четвертый большой круг 4, находящийся в «общем положении» с 1, 2 и 3. Для этого достаточно узнать, на сколько отдельных кусков будет разбит круг четвертым точками пересечения с тремя другими кругами.

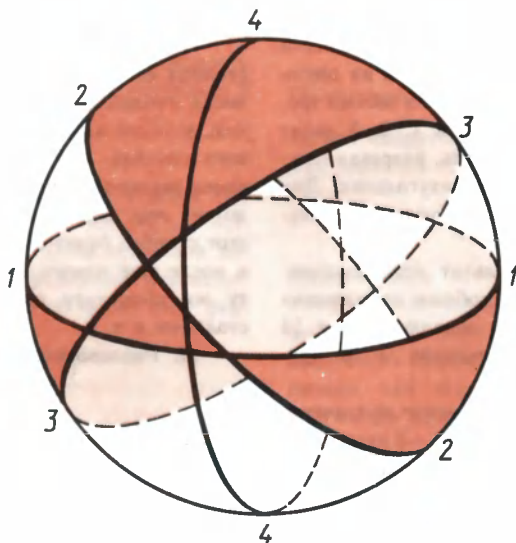


Рис. 136

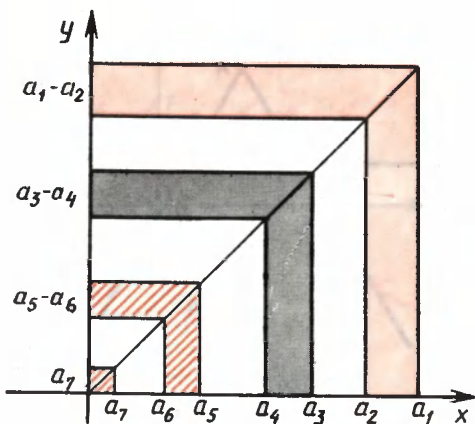


Рис. 137

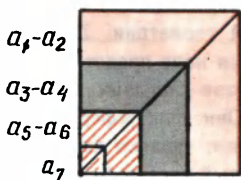


Рис. 138

Каждые два больших круга пересекаются в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому большой круг 4 пересекает три других больших круга 1, 2, 3 всего в шести точках, т. е. разбивается ими всего на шесть дуг (рис. 136). Таким образом, из восьми треугольников, на которые круги 1, 2, 3 делят сферу, круг 4 пересекает шесть, разрезая каждый на треугольник и четырехугольник. Два из восьми треугольников остаются нетронутыми.

Окончательный результат исследования: четыре больших круга в «общем положении» разбивают сферу всегда одинаково — на 14 областей — 6 четырехугольников и 8 треугольников.

в) И в этой задаче разбиение получается всегда одинаковым: на 22 части — 2 пятиугольника, 10 треугольников и 10 четырехугольников. Доказательство предлагаем обдумать самостоятельно.

Задача 7 типична для педагогического

направления в творчестве А. Н. Колмогорова, нацеленного на развитие математического мышления учащихся. Обстоятельное изложение решения этой задачи А. Н. Колмогорова выполнено Н. Б. Васильевым (см.: Квант. — 1978. — № 3. — С. 32—34).

#### 8. Левая часть неравенств

$$(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots)$$

интерпретируется на рисунке 137 суммой площадей заштрихованных трапеций (из площади квадрата  $a_1 \times a_1$  надо вычесть площадь квадрата  $a_2 \times a_2$ , добавить площадь квадрата  $a_3 \times a_3$ , вычесть  $a_4 \times a_4$  и т. д.).

Правая часть

$$(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots)^2$$

интерпретируется на рисунке 138 площадью квадрата, сторона которого равна сумме высот этих трапеций ( $a_1 - a_2, a_3 - a_4, \dots$ ); его можно разбить на трапеции с такими же высотами, но с меньшими средними линиями, поэтому левая часть неравенства не меньше правой.

9. Инвариантом указанных преобразований является остаток от деления числа на 9. Так как 1 000 000 дает при делении на 9 остаток, равный 1, то в получившемся множестве чисел единиц на 1 больше числа двоек.

10. Инвариантом является произведение знаков. (Для ясности замените плюсы на 1, а минусы — на -1.)

11. Если в каких-либо строках первого столбца есть числа, равные 1, то удвоим все числа таблицы, расположенные в этих строках, а затем вычтем по 1 из всех чисел первого столбца. Легко выясняется, что сумма чисел первого столбца при этом уменьшается до тех пор, пока мы не придем к тому, что этот столбец будет состоять только из единиц и после еще одного шага — из нулей. Затем ту же процедуру осуществляем со вторым столбцом и т. д.

#### 12. Равновозможны следующие случаи:

Для семьи

автора художника

Старший ребенок д д м м м

Младший ребенок д м д м д

Искомая вероятность:

$$P(d, d) = \frac{1}{3}, P(m, m) = \frac{1}{2}.$$

13. Расследование. Правильный результат не получен ни в одном из трех решений, хотя в рассуждениях все верно, кроме признания равновероятными предположенных исходов-комбинаций в каждом решении. В любой попытке решения следовало бы учитывать количество реально возможных комбинаций (из шести баночек по три).

Так, в попытке решения 1 действительно возможно лишь одно формирование трех баночек, ведущее к появлению события  $\begin{bmatrix} \text{ч} & \text{ч} & \text{ч} \end{bmatrix}$ , и одно, ведущее к появлению события  $\begin{bmatrix} \text{к} & \text{к} & \text{к} \end{bmatrix}$ , но появление событий вида в) и г) возможно в девяти случаях каждое. В самом деле, например, для формирования комплекта  $\begin{bmatrix} \text{ч} & \text{ч} & \text{к} \end{bmatrix}$  две баночки с черной краской могут быть выбраны из имеющихся трех ( $\text{ч}_1, \text{ч}_2, \text{ч}_3$ ) по воле случая тремя способами:  $\text{ч}_1\text{ч}_2, \text{ч}_1\text{ч}_3, \text{ч}_2\text{ч}_3$ . К каждой из этих пар может присоединиться одна из трех баночек с краской: либо  $\text{к}_1$ , либо  $\text{к}_2$ , либо  $\text{к}_3$ . Образуется  $3 \cdot 3 = 9$  комбинаций вида  $\begin{bmatrix} \text{ч} & \text{ч} & \text{к} \end{bmatrix}$ . Аналогично образуется 9 комбинаций вида  $\begin{bmatrix} \text{к} & \text{к} & \text{ч} \end{bmatrix}$ .

Окончательное число способов формирования комплектов-исходов вида а), б), в), г) равно  $1 + 1 + 9 + 9 = 20$  с вероятностью  $\frac{1}{20}$  для исходов вида а), б) и с вероятностью  $\frac{9}{20}$  для исходов вида в), г). Тогда вероятность события  $A$  (ччч или ккк) согласно постулату 3 равна  $P(A) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 0,1$ .

14. Пусть в семье капитана  $n$  детей (условно различим их буквами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ), из них  $m$  голубоглазых. Дети встречали папу парами. Сколько всех различных пар может быть составлено из  $n$  детей? Ответ дает формула

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Кому неизвестна эта формула (число сочетаний из  $n$  по 2), может выполнить непосредственный подсчет числа возможных неповторяющихся пар:

одна пара ( $A_1A_2$ ) + две пары ( $A_1A_3, A_2A_3$ ) +

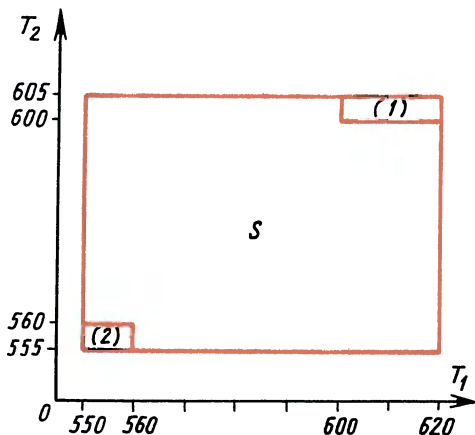


Рис. 139

+ три пары ( $A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4$ ) + ... +  $(n-1)$  пар ( $A_1A_n, A_2A_n, \dots, A_{n-1}A_n$ ).

Число всех возможных различных пар равно

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Точно так же из  $m$  голубоглазых детей можно составить  $\frac{m(m-1)}{2}$  пар. Следовательно, вероятность того, что два случайно объединившихся для встречи папы ребенка голубоглазые, равна

$$\frac{m(m-1)}{2} : \frac{n(n-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.$$

По условию эта вероятность равна  $\frac{1}{2}$ , поэтому задача сводится к подбору таких натуральных значений  $m$  и  $n$ , при которых

$$\frac{m(m-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Наименьшими из таких значений являются  $n=4$  и  $m=3$ . Ближайшие последующие значения:  $n=21$  и  $m=15$ . Число 21, пожалуй, великовато для возможного состава семьи капитана, так что, по-видимому, у капитана четверо детей, трое из них — голубоглазые.

15. Здесь все пары ( $T_1, T_2$ ) возможных значений температур первого и второго компонентов целесообразно вообразить точками на координатной плоскости  $T_1OT_2$  (рис. 139),

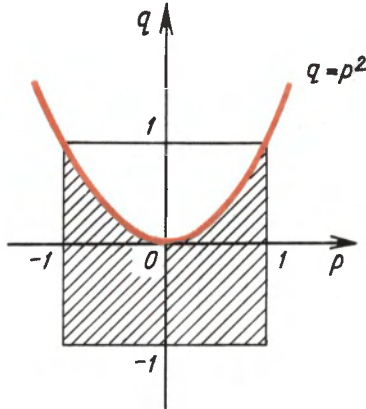


Рис. 140

координаты  $T_1$  и  $T_2$  которых удовлетворяют неравенствам

$$550^\circ \leq T_1 \leq 620^\circ \text{ и } 555^\circ \leq T_2 \leq 605^\circ.$$

Условие задачи позволяет полагать, что температура каждого из компонентов меняется независимо от температуры другого и при этом «плотность» точек одинакова в каждом пункте прямоугольника  $ABCD$ .

По условию процесс не будет протекать нормально, если

$$\min \{T_1, T_2\} > 600^\circ, \max \{T_1, T_2\} < 560^\circ.$$

Этим неравенствам отвечают точки внутри прямоугольников (1) с площадью  $S_1=100$  и (2) с площадью  $S_2=50$ . Искомая вероятность ( $P$ ) того, что процесс протекает нормально, равна

$$P = 1 - \frac{S_1 + S_2}{S} = 1 - \frac{150}{3500} = \frac{67}{70} \approx 0,95.$$

16. Дискриминант  $p^2 = q$  неотрицателен, когда  $q \leq p^2$ . По условию  $-1 \leq p \leq 1$ ,  $-1 \leq q \leq 1$ . В совокупности этим условиям удовлетворяют точки заштрихованной части квадрата  $ABCD$  (рис. 140), из которого как бы удален сегмент, ограниченный параболой  $q = p^2$  и прямой  $q = 1$ ;  $S_{\text{кв}} = 4$ . Заштрихованная площадь

$$S = 2 \int_0^1 p^2 dp = \frac{8}{3}.$$

Искомая вероятность:

$$P = \frac{S}{S_{\text{кв}}} = \frac{8}{3} : 4 = \frac{2}{3}.$$

17.1. Суммой девяти одинаковых слагаемых, по-видимому, является репьюнит  $R_9$ . Известно, что  $R_9 = 111111111 = 3^2 \cdot 37 \cdot 333\,667$ , откуда  $R_9 : 9 = 37 \cdot 333\,667 = 1\,234\,579$  — все цифры разные, как и должно быть для расшифровки слова «репьюнит».

О т в е т: репьюнит = 12 345 679.

2. Поскольку наибольшая цифра палиндрома 5 и занимает среднюю позицию в его записи, то множителем этого палиндрома является  $R_5$ . Количество цифр произведения равно 12. Так как  $12 + 1 - 5 = 8$ , то другой множитель — число  $R_8$ .

3. Простые делители репьюнита  $R_7 = 239$  и 4649. Цена нового автомобиля, по-видимому, больше, чем 239 долларов, поэтому фирмой было продано 239 автомашин по цене 4649 долларов за каждую.

4. Квадрат семизначного числа, все цифры которого одинаковы, оказался 13-значным палиндромом с семью различными числами. Таким и должен быть квадрат репьюнита  $R_7$ ;  $1\,111\,111^2 = 123\,456\,7\,654\,321$ .

5. В десятичной системе счисления:  $R_1 = 1$ ,  $R_{n+1} = 10R_n + 1$ .

6. Два репьюнита имеют общий множитель только тогда, когда их номера ( $n$ ) имеют общий простой делитель. Поскольку:

а) два последовательных числа не имеют общего простого делителя, то  $R_n$  и  $R_{n+1}$  взаимно просты, б) два последовательных нечетных числа не имеют общего простого делителя, то  $R_{2n+1}$  и  $R_{2n+3}$  взаимно просты, в) два последовательных четных числа имеют общим простым делителем число 2, то  $R_{2n}$  и  $R_{2n+2}$  не являются взаимно простыми; их единственным общим простым делителем будет репьюнит  $R_2 = 11$ .

7. В системе счисления с основанием  $b$  репьюнит  $R(b, n)$  может быть записан в форме  $(b^n - 1)(b - 1) = b^0 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}$ , т. е. представляет собой сумму степеней с показателями степени 0, 1, 2, ...,  $(n-1)$ . Когда  $b$  четно, каждое из этих слагаемых, кроме  $b^0 = 1$ , четно, поэтому все такие репьюниты — нечетные числа. Когда  $b$  нечетно, каждая степень числа  $b$  нечетна. Тогда, если  $n$  нечетно, то репьюнит нечетен, если же  $n$  четно, то репьюнит четен. Поэтому репьюнит при нечетном основании будет четен только тогда, когда количество единиц в репьюните четно.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Архимед — величайший древнегреческий математик, физик, инженер . . . . .</b>	<b>6</b>
Уголок дополнительных сообщений и задач . . . . .	13
<b>Гений XVIII века — Леонард Эйлер . . . . .</b>	<b>24</b>
Уголок дополнительных сообщений и задач . . . . .	32
<b>Николай Иванович Лобачевский — великий реформатор геометрии . . . . .</b>	<b>48</b>
Уголок дополнительных сообщений и задач . . . . .	59
<b>Трагическая судьба Эвариста Галуа . . . . .</b>	<b>78</b>
Уголок дополнительных сообщений и задач . . . . .	84
<b>Корифей математики XIX века Пафнутий Львович Чебышев . . . . .</b>	<b>97</b>
Уголок дополнительных сообщений и задач . . . . .	104
<b>«Принцесса науки» Софья Васильевна Ковалевская . . . . .</b>	<b>112</b>
Уголок дополнительных сообщений и задач . . . . .	121
<b>«Русский Архимед» — Владимир Андреевич Стеклов . . . . .</b>	<b>131</b>
Уголок дополнительных сообщений и задач . . . . .	137
<b>«Моя жизнь была преисполнена счастья» — Андрей Николаевич Колмогоров . . . . .</b>	<b>152</b>
Уголок дополнительных сообщений и задач . . . . .	169

Учебное издание

**Кордемский Борис Анастасьевич**

**ВЕЛИКИЕ ЖИЗНИ В МАТЕМАТИКЕ**

Зав. редакцией	<i>Т. А. Бурмистрова</i>
Редактор	<i>Л. В. Туркестанская</i>
Младший редактор	<i>М. К. Кузин</i>
Художники	<i>О. М. Шмелев, Б. Л. Николаев</i>
Художественный редактор	<i>Ю. В. Пахомов</i>
Технические редакторы	<i>Т. Е. Молозева, Н. Т. Рудникова</i>
Корректоры	<i>И. В. Чернова, Н. В. Белозёрова</i>

ИБ 13897

Лицензия ЛР № 010001 от 10.10.91. Сдано в набор 27.04.92. Подписано к печати 19.11.93. Формат 70×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,04+0,29 ф. Усл. кр.-отт. 29,6. Уч.-изд. л. 13,33+0,48 ф. Тираж 30 000 экз. Заказ 3395.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной роши, 41.

Смоленский полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.



